Univerzitet u Sarajevu – Fakultet za saobraćaj i komunikacije

Operaciona istraživanja u saobraćaju i komunikacijama

Dr.sc. Elma Avdagić-Golub · Dr.sc. Nedim Osmić · Dr.sc. Belma Memić

Sarajevo, decembar 2025

Operaciona istraživanja u saobraćaju i komunikacijama

Elma Avdagić-Golub, Nedim Osmić, Belma Memić

Sarajevo, 2025.

Dr.sc. Elma Avdagić-Golub, Dr.sc. Nedim Osmić, Dr.sc. Belma Memić

OPERACIONA ISTRAŽIVANJA U SAOBRAĆAJU I KOMUNIKACIJAMA

Recenzenti:

Prof. dr Ivan Grgurević
Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti

Doc. dr Adisa Hasković Džubur
Univerzitet u Sarajevu – Fakultet za saobraćaj i komunikacije

Izdavač:
Univerzitet u Sarajevu – Fakultet za saobraćaj i komunikacije, Sarajevo

Elektronsko izdanje

ISBN 978-9958-619-60-1

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke
BiH pod
ID brojem 67437830

Mjesto i godina izdanja: Sarajevo, 2025.

Predgovor

Operaciona istraživanja predstavljaju savremeni pristup rješavanju složenih problema u kojima je potrebno pronaći optimalnu raspodjelu ograničenih resursa. Njihova primjena obuhvata širok spektar zadataka – od transportnih i mrežnih problema do rasporeda radnika i upravljanja zalihama. Ova knjiga daje pregled matematičkih modela i metoda optimizacije, kombinujući teorijske osnove sa praktičnim primjerima, kako bi se olakšalo donošenje boljih odluka u složenim organizacionim sistemima.

Cilj rukopisa je pružiti čitaocu pregled ključnih pojmova i metoda operacionih istraživanja, sa naglaskom na matematičko modeliranje i interpretaciju dobijenih rješenja. Knjiga je namijenjena studentima viših godina studija Fakulteta za saobraćaj i komunikacije, srodnih tehničkih studija, kao i svima koji prvi put ulaze u područje optimizacije i matematičkog modeliranja.

Poglavlje 1 „Osnove teorije operacionih istraživanja“ uvodi ključne pojmove, metode i ciljeve ove discipline. Objašnjava se postupak definisanja problema, formulacije funkcije cilja, identifikacije ograničenja i izgradnje matematičkog modela. Ovo poglavlje služi kao temelj za sve naprednije metode obrađene u nastavku rukopisa.

Poglavlje 2 „Nelinearno programiranje“ bavi se optimizacijom u situacijama kada funkcija cilja ili ograničenja nisu linearne. Obrađene su osnovne gradijentne metode, uključujući Newton–Raphson, sekantnu metodu, Fibonacci pretraživanje i metodu zlatnog reza, sa ciljem prikaza postupaka pronalaženja minimuma i maksimuma nelinearnih funkcija.

Poglavlje 3 „Teorija optimizacije“ pokriva bezuslovnu i uslovnu optimizaciju funkcija jedne i više promjenljivih. Objašnjeni su stacionarni uslovi, drugi izvod, Hessian matrica i Lagrange-ovi multiplikatori, pružajući matematičku osnovu za razumijevanje strukture optimizacijskih problema.

Poglavlje 4 „Linearno programiranje“ detaljno predstavlja formulaciju modela linearnog programiranja, grafičke metode rješavanja i simpleks algoritam. Posebna pažnja posvećena je degeneraciji, skaliranju, dualnosti i primjeni dualne simpleksne metode, uz brojne ilustrativne primjere i tabele.

Poglavlje 5 „Cjelobrojno programiranje“ prikazuje metode rješavanja problema koji zahtijevaju diskretne ili binarne varijable, uključujući metode Gomorijevih rezova, Branch and Bound i mješovito cjelobrojno programiranje. Naglašena je primjena u modelima dodjele resursa, lokaciji baznih stanica i optimizaciji mrežnih struktura.

Poglavlje 6 „Primjeri optimizacijskih problema u saobraćaju i komunikacijama“ donosi praktične primjene linearnih i cjelobrojnih modela. Razmatraju se transportni problem, maksimalni protok, minimalni put, Cutting Stock, Knapsack i problemi raspoređivanja, čime se rukopis zaključuje konkretnim inženjerskim primjerima koji povezuju teoriju i praksu.

Kroz ova poglavlja knjiga kombinuje teorijski pristup sa praktičnim primjerima optimizacije, planiranja i dodjele resursa, pružajući čitaocu temeljnu osnovu za dalja istraživanja i primjene u saobraćaju i komunikacijama.

Autori, decembar 2025. god.

Sadržaj

Predgovor **iii**

1 Osnove teorije operacionih istraživanja **1**
1.1 Uvod u operaciona istraživanja 2
1.2 Osnovni pojmovi 3
1.2.1 Definisanje problema i prikupljanje podataka 3
1.2.2 Funkcija cilja ili kriterij odlučivanja 3
1.2.3 Skup ograničenja 4
1.2.4 Definisanje matematičkog modela 6

2 Nelinearno programiranje **9**
2.1 Opšta formulacija problema nelinearnog programiranja . . . 9
2.2 Gradijentne metode pretraživanja 10
2.2.1 Newton-Raphson metoda pretraživanja 11
2.2.2 Metoda sekante 19
2.2.3 Fibonaccijeva metoda 26
2.2.4 Metoda zlatnog reza 34

3 Teorija optimizacije **47**
3.1 Bezuslovna optimizacija funkcije jedne promjenljive 47
3.2 Bezuslovna optimizacija funkcije dvije ili više promjenljivih . 52
3.3 Uslovna optimizacija i Lagrange-ovi multiplikatori 61
3.3.1 Uslovna optimizacija tipa jednakosti 62
3.3.2 Uslovna optimizacija tipa nejednakosti 62

4 Linearno programiranje **89**
4.1 Opšta formulacija zadataka linearnog programiranja 90
4.2 Svođenje na standardnu formu problema linearnog programiranja 93
4.3 Grafička metoda rješavanja linearnog programiranja 94
4.3.1 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću vršnih tačaka 95
4.3.2 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću funkcije prirasta 101
4.3.3 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću metode rebrenih varijacija 110

4.4 Primjena simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja . . . 122
4.4.1 Problem degeneracije vršne tačke . . . 132
4.4.2 Drugi tipovi degeneracije vršne tačke i metoda velikog M . . . 141
4.4.3 Skaliranje problema linearnog programiranja . . . 147
4.5 Primjena dualne simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja . . . 152

5 Cjelobrojno programiranje 165
5.1 Uvod . . . 165
5.2 Metoda Gomorijevih rezova . . . 166
5.3 Branch and bound metoda . . . 167
5.4 Primjena metoda cjelobrojnog programiranja na mješovite probleme . . . 181

6 Primjeri optimizacijskih problema u saobraćaju i komunikacijama 183
6.1 Primjena LP-a za rješavanje transportnog problema . . . 183
6.2 Primjena LP-a za rješavanje problema maksimalnog protoka 198
6.3 Primjena LP za traženje minimalnog puta na mreži . . . 203
6.4 Rješavanje Cutting Stock problema metodama LP-a . . . 205
6.5 Rješavanje Knapsack problema korištenjem LP-a . . . 206
6.6 Primjena LP-a za rješavanje problema raspoređivanja . . . 210
6.6.1 Postavka problema raspoređivanja . . . 211
6.6.2 Cjelobrojnost rješenja problema raspoređivanja . . . 216

Bibliografija 223

1

Osnove teorije operacionih istraživanja

SADRŽAJ

1.1 Uvod u operaciona istraživanja 2
1.2 Osnovni pojmovi 2
1.2.1 Definisanje problema i prikupljanje podataka 3
1.2.2 Funkcija cilja ili kriterij odlučivanja 3
1.2.3 Skup ograničenja 4
1.2.4 Definisanje matematičkog modela 5

"It is not enough to do your best; you must know what to do, and then do your best."
– W. Edwards Deming

Predmet izučavanja *operacionih istraživanja* se odnosi na upravljanje organizacijskim, tehničkim i drugim sistemima, sa ciljem pronalaženja optimalnih rješenja za pripremanje i donošenje upravljačkih odluka i praćenje njihovog sprovođenja u odnosu na planirane rezultate [1]. U ovoj knjizi je obuhvaćeno matematičko programiranje, sa posebnim osvrtom na nelinearno programiranje - NP i linearno programiranje - LP. Osim teorijskih osnova pojedinih metoda, uključeni su i riješeni primjeri problema operacionih istraživanja.

1.1 Uvod u operaciona istraživanja

Osnovna karakteristika savremenog društva je prisustvo složenih sistema. Unutar tih sistema djeluje veći broj međusobno isprepletenih podsistema, tako da je izuzetno teško predvidjeti njihova ponašanja. Ono što je najbolje za jedan podsistem često je štetno za drugi, tako da na kraju podsistemi mogu optimalno funkcionisati svaki za sebe, ali u cjelini sistem može da ne funkcioniše optimalno. Problem se dalje usložnjava kada je neophodno raspodijeliti raspoloživa sredstva za različite aktivnosti na način koji je najefikasniji za organizaciju u cjelini. Ove vrste problema i potreba za pronalaženjem boljeg načina za njihovo rješavanje stvorili su okruženje za pojavu operacionih istraživanja. Probleme kod kojih iznalazimo maksimum ili minimum neke funkcije određenog broja promjenljivih (varijabli), pri čemu su promjenljive podvrgnute određenim ograničenjima, nazivamo *problemima optimizacije* [2]. Drugim riječima, rješavati ove probleme znači iznalaziti optimalnu raspodjelu ograničenih resursa u odnosu na datu stvarnost.

Današnji problemi optimizacije često uključuju veliki broj promjenljivih koje je potrebno obraditi u kratkom vremenu [3], [4], što zahtijeva visok nivo stručnosti donosioca odluka kako bi rješenje bilo optimalno. Za donošenje odluka neophodno je imati što vjerniji matematički ili simulacijski model sistema, koji se želi optimizirati, kako bi se mogle primijeniti odgovarajuće metode koje omogućavaju korištenje specifično dizajniranih matematičkih aparata, koji dozvoljavaju određivanje optimalnog rješenja uz prisutna ograničenja na sistem. Danas se postupci optimizacije primjenjuju u cijelom nizu linearnih i nelinearnih problema [5]:

a) transportnih problema,

b) problema alokacije resursa,

c) problema mrežnih tokova,

d) problema optimalnog rasporeda radnika prilikom obavljanja poslova,

e) problema upravljanja zalihama,

f) optimalnog upravljanja sistemima,

g) problema oblikovanja i drugih srodnih problema.

Ova knjiga daje pregled određenog broja matematičkih modela i metoda optimizacije, kako bi se naučnim pristupom rješavanju problema pomoglo pri donošenju boljih odluka u upravljanju složenim sistemima.

1.2 Osnovni pojmovi

U procesima upravljanja postoji nekoliko jedinstvenih pojmova, koji se često razmatraju. Ti pojmovi dolaze do izražaja primjenom matematičkih metoda u izučavanju procesa upravljanja. To su:

1. Definisanje pojma problemske situacije
2. Matematički model
3. Funkcija cilja ili kriterij odlučivanja
4. Skup ograničenja

1.2.1 Definisanje problema i prikupljanje podataka

Većina praktičnih problema operacionih istraživanja u početku ima definisan problem na neodređen i neprecizan način. Dakle, prvi zadatak je proučiti relevantni sistem i dobro definisati problem koji se razmatra. Problemskom situacijom se naziva svaka situacija koja sadrži problem traženja rješenja (donošenja odluke) radi postizanja određenih ciljeva. Ovo uključuje određivanje pojedinosti kao što su ciljevi, ograničenja u pogledu onoga što se može učiniti, međusobne veze između oblasti koje se proučavaju i drugih oblasti organizacije, mogućih alternativnih pravaca djelovanja, vremenskih ograničenja za donošenje odluke, te drugih relevantnih faktora. Proces definisanja problema je ključan, jer u velikoj mjeri utječe na to koliko će zaključci studije biti relevantni. Teško je izvući „tačan” odgovor iz „pogrešnog” postavljenog problema!

Teorija optimizacije se pretežno bavi kvantitativno izrazivim problemskim situacijama. Optimalno upravljanje definiše problem upravljanja kao problem optimizacije. Proces traganja za „najboljim” rješenjem podrazumijeva korištenje različitih algoritama i procedura. Razvoj računara doprinosi raširenosti algoritamskih metoda traženja optimalnog rješenja.

1.2.2 Funkcija cilja ili kriterij odlučivanja

Upravljanje bilo kojim procesom zahtijeva jasno definisan cilj. Bez definisane funkcije cilja ili kriterij odlučivanja nemoguće je ostvariti konkretno upravljanje. U svakodnevnom životu čovjek također rješava probleme optimizacije postavljajući sebi određene ciljeve, poput izbora i kupovine određenih potrepština (odjeća, mobilni uređaj, kupovina automobila, stana), jer je s jedne strane ograničen budžetom (ograničenja na sistem) i onoga što bi želio kupiti (granična funkcija aspiracije). Ključni korak u formulisanju modela operacionog istraživanja je formulisanje funkcije cilja. To zahtijeva razvoj kvantitativne mjere učinka u odnosu na krajnje ciljeve donositelja odluka koji

su identificirani tokom definisanja problema. Ako postoji više ciljeva, njihove mjere se transformišu i kombinuju u složenu mjeru koja se naziva ukupna mjera učinka. Ova ukupna mjera može biti nešto opipljivo (npr. profit) što odgovara višem cilju organizacije ili može biti apstraktno (npr. korisnost). U krajnjem slučaju, zadatak razvoja ove mjere obično je složen i zahtijeva pažljivu usporedbu ciljeva i njihove relativne važnosti. Nakon što se razvije ukupna mjera učinka, funkcija cilja se izražava kao matematička funkcija promjenljivih odluke.

Kod definisanja funkcije cilja najčešće se polazi od verbalnog opisa cilja koji se želi postići. Potom se od deskriptivnog prelazi na analitičko formulisanje, sve dok se ne dobije konačan matematički oblik. U složenim problemima iz prakse, određivanje funkcije cilja i njeno predstavljanje u matematičkoj formi predstavlja poseban problem. Nije jednostavno naći matematički oblik funkcije koja odražava specifične zahtjeve u pogledu upravljanja, te dosta često predstavlja aproksimaciju stvarnog problema, jer se svi efekti ne mogu modelirati.

U matematičkom smislu funkcija cilja se izražava nekom funkcijom $f(x)$, gdje je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n - dimenzionalni vektor. Zadatak operacionog istraživanja jeste pronaći minimum ili maksimum funkcije $f(x)$ [1]. Drugim riječima, funkcija cilja predstavlja funkciju jedne ili više promjenjivih za koju je potrebno naći ekstremnu vrijednost. Primjeri minimiziranja funkcije cilja su problemi u kojima funkcija cilja predstavlja troškove, vrijeme realizacije zadataka, utrošak materijala, vrijeme transporta i slične veličine. Dok primjeri maksimiziranja funkcije cilja obuhvataju probleme u kojima funkcija cilja predstavlja dobit, pouzdanost, doprinos po jedinici površine i slične pokazatelje.

1.2.3 Skup ograničenja

Svaki organizacioni sistem, bez obzira na svoju prirodu, postoji ostvarujući svoje ciljeve pod uslovima različitih ograničenja, koja su posljedica prirode sistema. Skup ograničenja utvrđuje se za svaki upravljački zadatak posebno. Skup ograničenja Ω određen je sistemom m jednačina i/ili nejednačina koje uključuju iste nepoznate komponente n - dimenzionalnog vektora $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. U osnovi, skup ograničenja predstavlja skup hiperpovršina i/ili hiperravnina u n - dimenzionalnom prostoru kojima je ograničen domen D, iz kojeg se bira x za koje funkcija $f(x)$ ima ekstremnu vrijednost, minimum ili maksimum [2]. Sve vrijednosti x iz domena D se nazivaju dopustivim rješenjem, dok ono x za koje funkcija $f(x)$ ima ekstremnu vrijednost se naziva optimalno rješenje.

Drugim riječima, kriterij predstavlja funkciju n realnih promjenljivih:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

Zadatak optimizacije bez ograničenja je:

$$f^* = \max_{x \in E^n} f(x), \quad x^* = \arg\max_{x \in E^n} f(x) \tag{1.2}$$

Potencijalno rješenje problemske situacije predstavlja tačku u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n ($E^n = \mathbb{R}^n$).

Zadatak optimizacije sa ograničenjima je:

$$f^* = \max_{x \in \ \Omega} f(x), \quad x^* = \arg\max_{x \in \Omega} f(x) \tag{1.3}$$

$$\Omega \subseteq E^n$$

Tačka x^* predstavlja tačku slabog lokalnog maksimuma ukoliko vrijedi:

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}(x^*) \subseteq \Omega \tag{1.4}$$

Tačka x^* predstavlja tačku strogog lokalnog maksimuma ukoliko vrijedi:

$$f(x^*) > f(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}(x^*) \subseteq \Omega \tag{1.5}$$

Lokalni maksimum (minimum) se naziva i relativni maksimum (minimum). U procesu rješavanja problema postoji i prirodan skup ograničenja koji zahtijeva da sve komponente vektora x moraju biti nenegativne veličine, tj. da je $x_i \geq 0, (i = 1, 2, ..., n)$. Sa matematičkog aspekta uslov nenegativnosti se ne razlikuje od ostalih uslova, ali pri rješavanju problema često se drugačije tretira i zbog toga se ovi uslovi nazivaju uslovi nenegativnosti, a ostali uslovi ograničenja.

Skup ograničenja Ω može imati sljedeća svojstva:

1. Skup Ω može biti nesaglasan, što znači da ne postoji dopustivo rješenje $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ koje zadovoljava sva ograničenja.

2. Skup Ω je saglasan, ali oblast D je neograničena. Moguće je iznalaženje optimalnog rješenja, ako je funkcija $f(x)$ ograničena u neograničenoj oblasti D.

3. Skup Ω je saglasan i oblast D je ograničena. Moguće je iznalaženje optimalnog rješenja u svim slučajevima osim kada je funkcija $f(x)$ neograničena u ograničenoj oblasti D.

Razumijevanje ovih svojstava predstavlja osnovu za primjenu konkretnih metoda operacionih istraživanja koje će biti razmatrane u narednim poglavljima.

1.2.4 Definisanje matematičkog modela

Nakon što se definiše problem donosioca odluka, sljedeća faza je da se ovaj problem preformuliše u formu pogodnu za analizu. Konvencionalni pristup operacionih istraživanja podrazumijeva da se konstruiše matematički model koji predstavlja suštinu problema. Prevođenje verbalnog opisa problema na matematičke simbole se naziva formiranje matematičkog modela. Matematički model realno odražava sistem koji se istražuje. On omogućava da se pronađu uticaji upravljačkih parametara na izmjenu karakteristika sistema u cilju postizanja uslova njegovog optimalnog funkcionisanja.

Preciznije rečeno, a koristeći simbole i oznake koje su prethodno definisane, formiranje matematičkog modela podrazumijeva formiranje funkcije cilja $f(x)$, skupa ograničenja Ω i sistematizovano prikupljanje, verifikovanje i sređivanje potrebnih početnih podataka u cilju kompletiranja jedne ili više varijanti modela. Znači, matematički model M ima komponente $f(x)$, Ω i uslove nenegativnosti $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ [6].

Gradnja modela uključuje nekoliko ključnih elemenata. Prvo, definišu se alternative, koje se određuju vrijednostima relevantnih promjenljivih. Zatim se postavljaju ciljevi, pri čemu funkcije cilja (kriteriji) omogućava vrednovanje alternativa sa stanovišta njihovog doprinosa ostvarivanju tih ciljeva. Također, uspostavlja se poredak u prostoru vrijednosti, koji omogućava upoređivanje i rangiranje alternativa, te se definiše granična aspiracija, odnosno kriterij za određivanje optimuma.

Alternativa, odnosno potencijalno rješenje, može se predstaviti kao tačka u prostoru E^n,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ukoliko $x \in E^n$, radi se o problemu bez ograničenja, dok je ukoliko $x \in \Omega \subseteq E^n$ u pitanju problem s ograničenjima. Izbor neke od dozvoljenih alternativa u većoj ili manjoj mjeri doprinosi postizanju ciljeva.

Ciljevi su apstraktni, stoga se pri vrednovanju koriste atributi i kriteriji. Atribut odražava svojstvo alternative ili njene posljedice, na osnovu kojeg se alternativa može uporediti sa drugim alternativama. Kriterij, s druge strane, predstavlja mjeru definisanu na odgovarajućoj skali, koja omogućava kvantifikaciju alternative u pogledu njene veličine ili vrijednosti. Formalno, kriterij se može predstaviti kao preslikavanje

$$q : \Omega \to V,$$

koje svakoj tački $x \in \Omega \subseteq E^n$ prostora problema pridružuje tačku $v \in V$ prostora vrijednosti [7].

Vrijednost alternative može se mjeriti korištenjem jednog ili više kriterija, pri čemu broj kriterija određuje dimenzionalnost prostora vrijednosti. Da bi se

moglo suditi koliko je jedna alternativa bolja ili lošija od druge, neophodno je uvesti poredak u prostoru vrijednosti, označen kao $v^i \rho\, v^j$. Za jednokriterijalne problemske situacije odnos prednosti se obično definiše pomoću relacija $\leq$ ili $\geq$, dok se za višekriterijalne probleme najčešće koristi Pareto odnos prednosti. Također, neophodno je definisati i graničnu aspiraciju, koja predstavlja željeno rješenje problema. Za jednokriterijalne probleme, granična aspiracija se ogleda u definiranju problema traženja maksimuma ili minimuma. Problem traženja minimuma se pritom lahko može svesti na problem traženja maksimuma i obratno.

$$min(f(x)) = -max(-f(x)) \tag{1.6}$$

Poznavanje osobina problemske situacije koju model opisuje je bitno, jer o njima ovisi koliko je zahtjevno njeno rješavanje.

Klasifikacija problemskih situacija se može izvršiti po različitim osnovama. Važnije osobine problemske situacije su:

- Dimenzionalnost prostora problema - Razlikuju se jednodimenzionalne i višedimenzionalne optimizacije, detaljnije u literaturi [8], [9]
- Postojanje ograničenja na alternative - Razlikuju se ograničeni i neograničeni modeli, detaljnije u literaturi [8], [9], [10]
- Broj kriterija - Razlikuju se jednokriterijalna i višekriterijalna optimizacija, detaljnije u literaturi [11], [12], [13]
- Linearnost - Razlikuju se linearni i nelinearni modeli, detaljnije u literaturi [14], [15], [16]
- Konveksnost - Razlikuju se konveksne i nekonveksne optimizacije, detaljnije u [8], [12]
- Postojanje neovisne promjenljive - Razlikuje se optimizacija sa nezavisnim varijablama i sa zavisnim varijablama, detaljnije u [17], [18], [19]
- Promjenljivost problemske situacije - Razlikuju se statička, dinamička i stohastička optimizacija, detaljnije u [20], [21], [22]
- Kontinualnost - Razlikuje se kontinualna i nekontinualna (diskretna) optimizacija, detaljnije u [23], [24], [13]

Na osnovu uvedenih pojmova i klasifikacija, postavljen je teorijski okvir neophodan za razumijevanje i primjenu metoda operacionih istraživanja. U narednim poglavljima biće razmatrane konkretne metode i algoritmi koji omogućavaju praktično rješavanje ovako formulisanih optimizacionih problema.

2

Nelinearno programiranje

SADRŽAJ

2.1 Opšta formulacija problema nelinearnog programiranja 9
2.2 Gradijentne metode pretraživanja 10
2.2.1 Newton-Raphson metoda pretraživanja 11
2.2.2 Metoda sekante 19
2.2.3 Fibonaccijeva metoda 26
2.2.4 Metoda zlatnog reza 34

Nakon upoznavanja sa osnovama teorije optimizacije, u ovom poglavlju fokus je na nelinearnim problemima. Mnoštvo realnih problema je nelinearno, što njihovu strukturu čini znatno složenijom i otežava njihovo rješavanje. Zbog toga su razvijene različite metode optimizacije, jer ne postoji jedinstvena metoda koja postiže najbolje rezultate za sve probleme nelinearnog programiranja. Efikasnost odabrane metode zavisi i od osobina same problemske situacije i od karakteristika metode. Svaka iterativna metoda pretraživanja treba biti efikasna i konvergentna. Posebno je važno dobro poznavati numeričke metode, budući da one omogućavaju rješavanje klasa problema nelinearnog programiranja koje se u praksi često pojavljuju. Osim što pružaju efikasna rješenja, ove metode se relativno jednostavno mogu implementirati na računaru, čime postaju nezaobilazan alat u savremenom optimizacijskom procesu.

2.1 Opšta formulacija problema nelinearnog programiranja

U jednom opštem obliku, problem nelinearnog programiranja se može opisati kao:

Pronalaženje n-dimenzionalnog vektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, za koji funkcija cilja

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

postiže maksimalnu ili minimalnu vrijednost pod zadovoljenim ograničenjima.

$$\begin{gathered} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, i = 1, 2, ..., m, \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, ..., n) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Funkcije $f(x)$ i $g_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, u opštem slučaju su nelinearne, po čemu ovaj tip problema nosi naziv *nelinearno programiranje (NP)*. Postoji mnoštvo različitih vrsta problema nelinearnog programiranja, u zavisnosti od karakteristika funkcija $f(x)$ i $g_i(x)$ [25]. Koriste se različiti algoritmi za različite vrste problema. Problemi koji imaju jednostavne oblike mogu se riješiti relativno efikasno. Za neke druge vrste, rješavanje čak i malih problema je pravi izazov. Neke od klasifikacija, koje u prvi plan stavljaju rješive zadatke NP i njihovu opštu formulaciju su:

a) *NP sa linearnim skupom ograničenja* (Ω)

b) *NP sa separabilnom funkcijom cilja* $f(x)$

c) *Kvadratno programiranje*

d) *Cjelobrojno programiranje*

U praksi postoji nekoliko tipičnih zadataka NP, kao što su: zadaci raspodjele ograničenih resursa, transportni zadaci, zadaci koji se odnose na upravljanje zalihama i slično.

2.2 Gradijentne metode pretraživanja

Ne postoji univerzalna metoda za rješavanje nelinearnih problema. Postoji veliki broj metoda na osnovu kojih su razvijeni odgovarajući algoritmi. Poseban značaj imaju gradijentne metode. One predstavljaju metode sistemskog pretraživanja i iznalaženja rješenja. Odabirom polaznog rješenja $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ vrši se njegova promjena u smislu definisane funkcije cilja. U jednom koraku se nastoji napraviti što je moguća efikasnija promjena na bazi koje se određuje $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$. Da bi se to postiglo, potrebno je izračunati najbolji smjer promjene koji se kod gradijentnih metoda izražava u odnosu na smjer gradijenta (suprotan smjer u procesu traženja minimuma, a direktan smjer u traženju maksimuma) po čemu su metode i dobile ime [1]. Gradijentne metode se međusobno razlikuju po načinu izračuna gradijenta i veličine pomjeranja ka traženom rješenju duž gradijentnog pravca. Kao i kod svih iterativnih postupaka, prisutan je problem brzine konvergencije iterativnog postupka pronalaska rješenja.

U nastavku su obrađene četiri tehnike pretraživanja i to: Newton-Raphson

metoda, koja ima fundamentalnu ulogu u nelinearnom programiranju uopšte, te metode sekante, metoda Fibonaccijevog pretraživanja i metoda zlatnog reza (sječenja) za jednodimenzionalno pretraživanje.

2.2.1 Newton-Raphson metoda pretraživanja

Newton-Raphson metoda (izvorno nazvana Newton-ova metoda, koja će se koristiti u nastavku) jedna je od najpoznatijih i najefikasnijih procedura u numeričkoj analizi. Osnovna ideja koja stoji iza Newton-ove metode je da se aproksimira $f(x)$ u okolini trenutnog probnog rješenja kvadratnom funkcijom, a zatim da se ta aproksimativna funkcija maksimizira (ili minimizira) kako bi se dobilo novo probno rješenje za početak sljedeće iteracije. Ova ideja korištenja kvadratne aproksimacije ciljne funkcije postala je ključna karakteristika mnogih algoritama za općenitije probleme nelinearnog programiranja. Aproksimativna kvadratna funkcija se dobije skraćivanjem Taylor-ovog reda aproksimacije funkcije nakon drugog izvodnog člana. Konkretno, označimo x_{i+1} kao probno rješenje generisano u iteraciji i, koje služi za početak iteracije $i+1$ (x_1 je početno probno rješenje koje je korisnik dao za početak iteracije 1). Skraćeni Taylor-ov red za x_{i+1} je:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{2.3}$$

Pošto je fiksiran x_i na početku iteracije i, može se primijetiti da su $f(x_i)$, $f'(x_i)$ i $f''(x_i)$ fiksne konstante u ovoj aproksimativnoj funkciji s desne strane. Dakle, ova aproksimativna funkcija je samo kvadratna funkcija od x_{i+1}. Štaviše, ova kvadratna funkcija je dobra aproksimacija $f(x_{i+1})$ u blizini x_i da su vrijednosti njihovog prvog i drugog izvoda potpuno iste kada je $x_{i+1} = x_i$.

Ova kvadratna funkcija se sada može maksimizirati na uobičajeni način postavljanjem njenog prvog izvoda na nulu i rješavanjem za x_{i+1}. Važno je napomenuti da se pretpostavlja da je $f(x)$ konkavna, što implicira da je ova kvadratna funkcija konkavna. To znači da, kada se prvi izvod postavi na nulu, rješenje će biti globalni maksimum. Prvi izvod je:

$$f'(x_{i+1}) \approx f'(x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{2.4}$$

pošto su x_i, $f(x_i)$, $f'(x_i)$ i $f''(x_i)$ konstante. Postavljanje prvog izvoda na nulu daje:

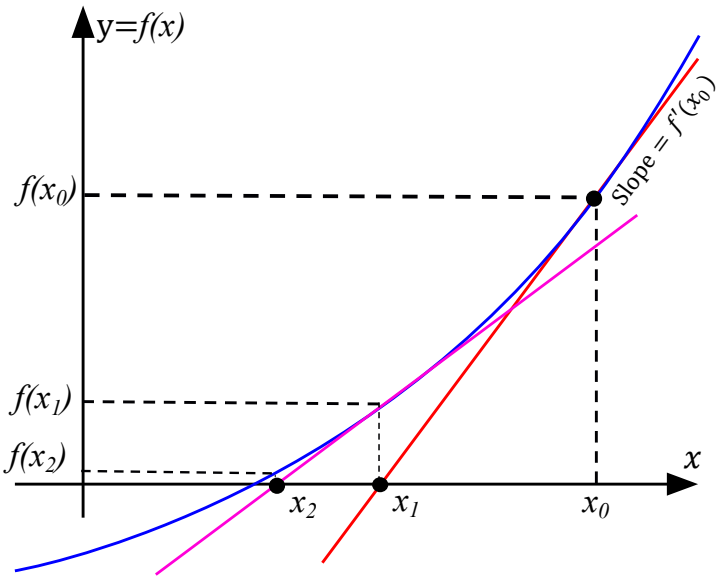
$$f'(x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0 \tag{2.5}$$

što vodi do rješenja [26]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \tag{2.6}$$

Jednačina (2.6) predstavlja algoritam Newton-ve metode za izračunavanje sljedećeg probnog rešenja x_{i+1}.

Jasno je da je Newton-ova metoda metoda drugog reda (kvadratna metoda), što u praksi znači da se broj značajnih cifara približno udvostručava pri svakoj iteraciji. Ova metoda ima odlične osobine za lokalnu konvergenciju, ali globalna konvergencija može biti slaba zbog zanemarivanja viših članova Taylorovog reda. Međutim, Newton-ova metoda ima i nedostatke, jer je za neke funkcije vrlo teško analitički izračunati prvi izvod, a za neke funkcije to uopšte nije moguće. Osim toga, može se desiti da u toku iterativnog procesa prvi izvod bude jednak nuli, čime ne bi bilo moguće nastaviti postupak rješavanja. U takvim slučajevima koriste se neke druge metode, kao što je metoda sječice. Grafička interpretacija metode data je na slici 2.1.



Slika 2.1: Grafički prikaz pretraživanja metodom Newton-Raphson.

Zadatak 1.

Data je funkcija:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Potrebno je odrediti ekstrem ove funkcije, ako se za početnu tačku uzme: $x_0 = 1$, korištenjem Newton-ove metode. Provesti četiri iteracije.

Rješenje zadatka 1:

Neophodno je prvo izračunati potrebne elemente za korištenje Newton-ove metode:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ f'(x) &= 6x - 6 \\ f''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Algoritam za Newton-ovu metodu je:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{6x_i - 6}{6}$$

Početna tačka:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ f(x_0) &= 1 \\ f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &= 6 \end{aligned}$$

Napomena: Budući da je početna tačka $x_0 = 1$ već ekstrem funkcije, Newton-ova metoda u ovom slučaju konvergira u jednoj iteraciji, a sve naredne iteracije daju istu vrijednost, što se vidi u nastavku.

Iteracije:

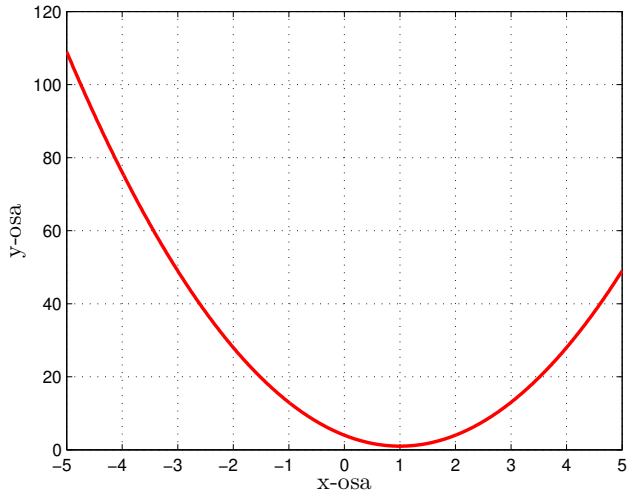
Iteracija 1: $x_1 = x_0 - \dfrac{6x_0 - 6}{6} = 1 - \dfrac{0}{6} = 1, \quad f(x_1) = 1, f'(x_1) = 0, \quad f''(x_1) = 6$

Iteracija 2: $x_2 = x_1 - \dfrac{6x_1 - 6}{6} = 1 - \dfrac{0}{6} = 1, \quad f(x_2) = 1, f'(x_2) = 0, \quad f''(x_2) = 6$

Iteracija 3: $x_3 = x_2 - \dfrac{6x_2 - 6}{6} = 1 - \dfrac{0}{6} = 1, \quad f(x_3) = 1, f'(x_3) = 0, \quad f''(x_3) = 6$

Iteracija 4: $x_4 = x_3 - \dfrac{6x_3 - 6}{6} = 1 - \dfrac{0}{6} = 1, \quad f(x_4) = 1, f'(x_4) = 0, \quad f''(x_4) = 6$

Minimum funkcije je u tački $M(1, 1)$, vrijednost minimuma je 1. Funkcija je unimodalna na intervalu od $(0, +\infty)$, što se može vidjeti na slici 2.2.



Slika 2.2: Graf funkcije $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

Zadatak 2.

Data je funkcija:

$$f(x) = 3\cos x - x + 3$$

Potrebno je odrediti ekstrem funkcije na intervalu $[3, 4]$, korištenjem Newton-ove metode. Iterativni postupak zaustaviti kad se postigne tačnost $\epsilon = 0.001$.

Rješenje zadatka 2:

Neophodno je prvo izračunati potrebne elemente za korištenje Newton-Raphsonove metode, a to je prvi i drugi izvod funkcije.

$$f'(x) = g(x) = -3\sin x - 1$$
$$f''(x) = g'(x) = -3\cos x$$

Algoritam za Newton-ovu metodu je :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n - \frac{-3\sin x_n - 1}{-3\cos x_n}$$

Za početna tačku uzima se: $x_0 = 3.5$, kako bi se smanjio broj iteracija do postizanja željene tačnosti.

Iteracije:

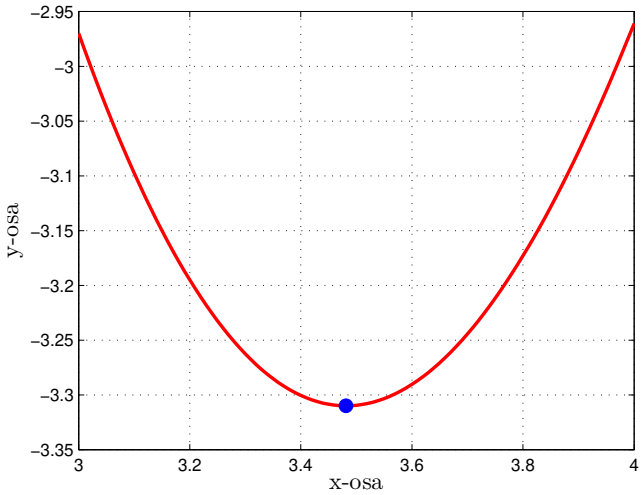
$$x_1 = 3.5 - \frac{f'(3.5)}{f''(3.5)} = 3.5 - \frac{0.0525}{2.8095} = 3.4813$$
$$x_2 = 3.4813 - \frac{f'(3.4813)}{f''(3.4813)} = 3.4813 - \frac{-0.0022}{2.8290} = 3.4821$$
$$x_3 = 3.4821 - \frac{f'(3.4821)}{f''(3.4821)} \approx 3.4821$$

Razlika između posljednje dvije iteracije $|x_3 - x_2| < \epsilon$, stoga se iteracija zaustavlja.

Ekstrem funkcije, sa tačnošću 10^{-3}, nalazi se u tački:

$$x \approx 3.4821, f(3.4821) \approx -3.311$$

što se može vidjeti na slici 2.3.



Slika 2.3: Graf funkcije $f(x) = 3\cos x - x + 3$.

Zadatak 3.

Odrediti u kojem podintervalu leži maksimum funkcije:

$$f(x) = 3 + 6x - 4x^2$$

na intervalu $[0, 1]$, nakon završene treće iteracije korištenjem Newton-ove metode.

Rješenje zadatka 3:

Neophodno je prvo izračunati potrebne elemente za korištenje Newton-ove metode, a to je prvi i drugi izvod funkcije.

Prvi izvod funkcije je:

$$f'(x) = 6 - 8x$$

Drugi izvod funkcije je:

$$f''(x) = -8$$

Algoritam za Newton-ovu metodu je:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Za početnu tačku se pretpostavlja $x_0 = 0.5$.

Iteracija 1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0.5 - \frac{6 - 8 \cdot 0.5}{-8}$$

$$x_1 = 0.5 - \frac{2}{-8} = 0.75$$

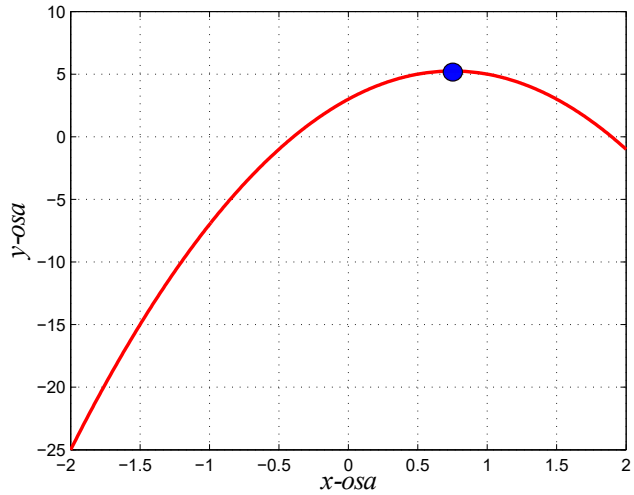
Iteracija 2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0.75 - \frac{6 - 8 \cdot 0.75}{-8}$$

$$x_2 = 0.75 - \frac{6 - 6}{-8} = 0.75$$

Iako je zadatkom predviđena treća iteracija, zbog toga što je $x_1 = x_2$, metoda je konvergirala ranije i daljnje iteracije ne mijenjaju rješenje.

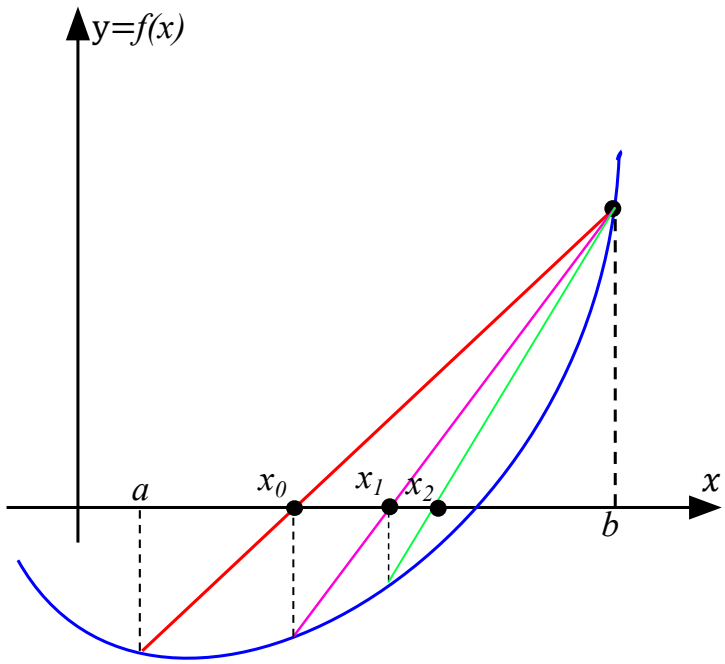
Vrijednost maksimuma leži u podintervalu $[0.5, 1]$, a tačno u tački $x = 0.75$, što je unutar datog intervala $[0, 1]$ (slika 2.4).



Slika 2.4: Graf funkcije $f(x) = 3 + 6x - 4x^2$.

2.2.2 Metoda sekante

Metoda sekante je metoda jednodimenzionalnog pretraživanja. Ona je specijalan slučaj metode regula falsi (što u prevodu znači metoda netačnog položaja). U metodi regula falsi nelinearna funkcija $f(x)$ se aproksimira linearnom funkcijom $g(x)$ na intervalu (a, b). Korijen linearne funkcije $g(x)$ koristi se kao sljedeća aproksimacija rješenja nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Grafička interpretacija metode regula falsi prikazana je na slici 2.5.



Slika 2.5: Grafička predstava metode regula falsi.

Linearna funkcija $g(x)$ ima korijen u tački x_0. Na taj način se početni interval (a, b) dijeli na dva podintervala (a, x_0) i (x_0, b). Vrijednost tačke x_0 se može odrediti pomoću jednačine prave kroz dvije tačke i to:

$$g(b) - g(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(b - x_0) \tag{2.7}$$

S obzirom na to da je:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a), \\ g(b) &= f(b), \\ g(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

slijedi:

$$f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x_0) \tag{2.8}$$

i konačno:

$$x_0 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}(f(b)) \tag{2.9}$$

Koji od dva intervala, (a, x_0) ili (x_0, b), sadrži korijen funkcije se određuje na osnovu uslova:

$$f(a) \cdot f(x_0) < 0, \text{ ili}$$
$$f(b) \cdot f(x_0) < 0$$

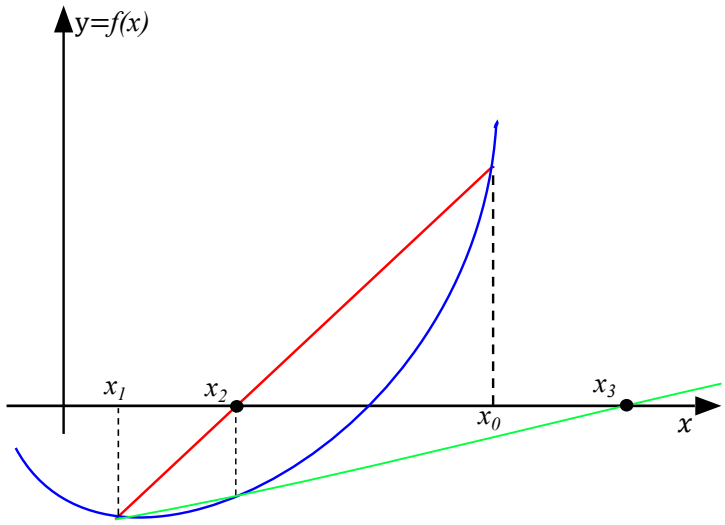
Proces se nastavlja dok se ne postigne željena tačnost ili postigne određen broj iteracija.

Kod metode sekante, funkcija $f(x)$ također se aproksimira sekantom $g(x)$, pravom sječicom kroz dvije tačke. Međutim, ključna razlika između metoda je način na koji se jedna od početnih vrijednosti zamjenjuje novom procjenom. Kod metode regula falsi najnovija procjena korjena se zamjenjuje bilo kojom od originalnih vrijednosti funkcije sa istim znakom kao $f(x)$. To znači da će korijen uvijek ostati unutar intervala između dvije procjene. Stoga, metoda uvijek konvergira, jer se korijen drži unutar zagrade. Nasuprot tome, sekantna metoda zamjenjuje vrijednosti u strogom nizu, pri čemu nova vrijednost x_{i+1} zamjenjuje x_i i x_i zamjenjuje x_{i-1}. Kao rezultat toga, dvije vrijednosti mogu ponekad da leže na istoj strani korijena.

Algoritam iterativnog postupka metode sekante je sljedeći:

$$x_{i+1} = x_i - g(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{g(x_i) - g(x_{i-1})} \tag{2.10}$$

Grafička predstava metode sekante prikazana je na slici 2.6.



Slika 2.6: Grafička predstava metode sekante.

Kao i kod ostalih iterativnih metoda, tipični uslovi zaustavljanja su: dostizanje zadanog broja iteracija, postizanje zadane minimalne vrijednosti greške ili postizanje zadane minimalne promjene problemske varijable.

Zadatak 4.

Primjenom metode sekante odrediti minimum funkcije:

$$f(x) = 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 6x$$

na intervalu $[0, 4]$, pri čemu je potrebno provesti četiri iteracije metode.

Rješenje zadatka 4:

Vrijednosti potrebnih elemenata za korištenje metode sekante su:

$$g(x) = f'(x) = 8x^3 + 30x^2 + 8x - 6$$

Krajnje tačke intervala su: $a = 0$, $b = 4$, koje se uvrštavaju u funkciju $g(x)$, pa slijedi:

$$g(a) = g(0) = -6$$

$$g(b) = g(4) = 8 \cdot 64 + 30 \cdot 16 + 8 \cdot 4 - 6 = 512 + 480 + 32 - 6 = 1018$$

$g(a) \cdot g(b) < 0 \quad \Rightarrow$ uslov zadovoljen, može se početi iterativni postupak.

Iteracija 1

$$i = 0: \quad x_0 = b - \frac{g(b)(b-a)}{g(b) - g(a)} = 4 - \frac{1018 \cdot (4-0)}{1018 + 6} = 0.0234$$

$$y_0 = f(x_0) = -0.1381$$

Iteracija 2

$$i = 1: \quad g(x_0) = -5.7963$$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)(x_0 - b)}{g(x_0) - g(b)} = 0.0234 + \frac{5.7963 \cdot (0.0234 - 4)}{-5.7963 - 1018} = 0.0459$$

$$y_1 = f(x_1) = -0.2661$$

Iteracija 3

$$i = 2: \quad g(x_1) = -5.5688$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)(x_1 - x_0)}{g(x_1) - g(x_0)} = 0.0459 + \frac{5.5688 \cdot (0.0459 - 0.0234)}{-5.5688 + 5.7963} = 0.5967$$

$$y_2 = f(x_2) = 0.2221$$

Iteracija 4

$$i = 3: \quad g(x_2) = 11.1547$$

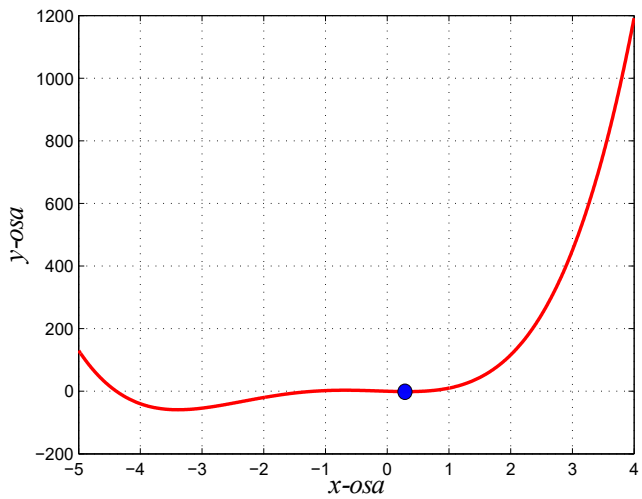
$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)(x_2 - x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = 0.5967 - \frac{11.1547 \cdot (0.5967 - 0.0459)}{11.1547 + 5.5688} = 0.2293$$

$$y_3 = f(x_3) = -1.0394$$

Dakle, vrijednosti funkcije po iteracijama metode sekante su:

$$y_{tr}([0,4]) = -0.1381, \quad -0.2661, \quad 0.2221, \quad -1.0394$$

Na slici 2.7 prikazan je graf funkcije $f(x)$ sa označenim minimumom dobijenim metodom sekante.



Slika 2.7: Graf funkcije $f(x) = 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 6x$ sa prikazanim minimumom.

Zadatak 5.

Data je funkcija:

$$f(x) = xe^x$$

Potrebno je pronaći minimum funkcije metodom sekante uz pet iteracija na intervalu $[-2, 0]$.

Rješenje zadatka 5:

Vrijednosti potrebnih elemenata za korištenje metode sekante su:

$$g(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

Krajnje tačke intervala su: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, koje se uvrštavaju u funkciju $g(x)$, pa slijedi:

$$x_0 = -2, \quad g(x_0) = e^{-2}(1-2) = -\frac{1}{e^2} \approx -0.1353$$

$$x_1 = 0, \quad g(x_1) = e^0(1+0) = 1$$

$g(x_0) \cdot g(x_1) < 0 \quad \Rightarrow$ uslov zadovoljen, može se početi iterativni postupak.

Iteracija 1

$$x_2 = x_1 - g(x_1)\frac{x_1 - x_0}{g(x_1) - g(x_0)} = 0 - 1 \cdot \frac{0-(-2)}{1-(-0.1353)} = -1.7618$$

$$g(x_2) = e^{-1.7618}(1 - 1.7618) \approx -0.131$$

Iteracija 2

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - g(x_2)\frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)} \\ &= -1.7618 - (-0.131) \cdot \frac{-1.7618 - 0}{-0.131 - 1} \\ &= -1.5578, \\ g(x_3) &\approx -0.1178 \end{aligned}$$

Iteracija 3

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - g(x_3)\frac{x_3 - x_2}{g(x_3) - g(x_2)} \\ &= -1.5578 - (-0.1178) \cdot \frac{-1.5578 - (-1.7618)}{-0.1178 - (-0.131)} \\ &= 0.262 \end{aligned}$$

$$g(x_4) \approx 1.64$$

Iteracija 4

$$x_5 = x_4 - g(x_4)\frac{x_4 - x_3}{g(x_4) - g(x_3)} = 0.262 - 1.64 \cdot \frac{0.262 - (-1.5578)}{1.64 - (-0.1178)} = -1.436$$

$$g(x_5) \approx -0.1038$$

Iteracija 5

$$x_6 = x_5 - g(x_5)\frac{x_5 - x_4}{g(x_5) - g(x_4)} = -1.436 - (-0.1038) \cdot \frac{-1.436 - 0.262}{-0.1038 - 1.64} = -1.335$$

$$g(x_6) \approx -0.0880$$

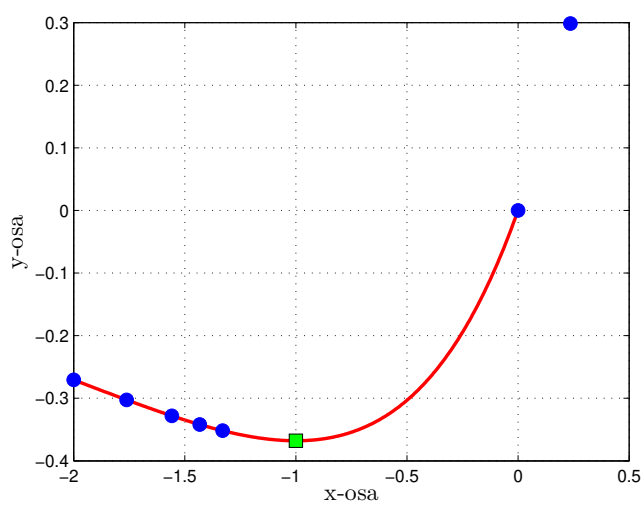
Zaključak:
Nakon pet iteracija metoda sekante se približava minimumu u tački:

$$x \approx -1.335, \quad \text{gdje je } g(x) \approx -0.0880.$$

Dakle, vrijednosti funkcije po iteracijama metode sekante su:

$$y_{tr}([-2, 0]) = -0.131, \quad -0.1178, \quad 1.64, \quad -0.1038, \quad -0.0880$$

Na slici 2.8 prikazan je graf funkcije $f(x) = xe^x$ sa označenim ekstremom.



Slika 2.8: Graf funkcije $f(x) = xe^x$ sa dostignutim minimumom metodom sekante

Na osnovu prikazanih primjera može se zaključiti da gradijentne metode predstavljaju efikasan alat za lokalno pretraživanje nelinearnih problema, uz jasno definisane uslove konvergencije.

2.2.3 Fibonaccijeva metoda

Kod praktičnih problema optimizacije često ne postoji eksplicitan oblik kriterija u formi $f(x)$, već se vrijednost kriterija evaluira eksperimentalno, pri čemu je unaprijed zadan dozvoljen broj eksperimentalnih evaluacija kriterija. Fibonaccijeva metoda omogućava da se kroz N eksperimenata odredi oblast u intervalu $a \leq x \leq b$ u kojoj leži tačka optimuma, pod uslovom da je kriterij unimodalan. S tim u vezi, razmatra se sljedeći problem minimizacije:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in [a, b] \end{aligned} \tag{2.11}$$

gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednovarijabilna funkcija, $[a, b]$ je zadani interval. Neka x^* označava minimizer funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Kaže se da je funkcija f unimodalna na $[a, b]$ ako važi [25]:

$$f(x) \text{ je opadajuća za } a \leq x \leq x^*, \quad \text{i rastuća za } x^* \leq x \leq b.$$

Dovoljan uslov da f bude unimodalna na $[a, b]$ jest da je $f(x)$ konveksna na $[a, b]$, ali unimodalna funkcija nije nužno konveksna funkcija. Fibonaccijeva pretraga se zasniva na nizu Fibonaccijevih brojeva koji su definisani jednačinama:

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{(N+1)} = F_N + F_{(N-1)}, \text{za } N = 1, 2, 3... \tag{2.12}$$

Fibonaccijevi brojevi su $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...$ Fibonaccijeva metoda bi se mogla opisati sljedećim koracima:

1. Definisati broj N eksperimenata
2. Početni interval $[a_1, b_1]$, čija je širina:

   $$d_1 = b_1 - a_1 \tag{2.13}$$

   podijeliti ravnomjerno na F_N podintervala, gdje je dužina svakog podintervala:

   $$d_N = \frac{b_1 - a_1}{F_N} = \frac{d_1}{F_N} \tag{2.14}$$

3. U prvoj iteraciji, prve dvije tačke se biraju na udaljenosti od krajeva intervala u skladu sa izrazom:

$$d_2 = \frac{F_{(N-1)}}{F_N}(b_1 - a_1) \tag{2.15}$$

Vrijednosti tačaka s lijeve (x_1) i desne strane (x_2) dobijaju se kao:

$$x_1 = a + \frac{F_{(N-1)}}{F_N}(b_1 - a_1) = a + d_1 \tag{2.16}$$

$$x_2 = b - \frac{F_{(N-1)}}{F_N}(b_1 - a_1) = b - d_1 \tag{2.17}$$

U opštem slučaju to je:

$$d_k = \frac{F_{(N-k+1)}}{F_N} d_1 \tag{2.18}$$

4. Uporediti vrijednosti funkcije u ove dvije tačke.

Ako je:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \tag{2.19}$$

onda je:

$$a = a, b = x_2$$

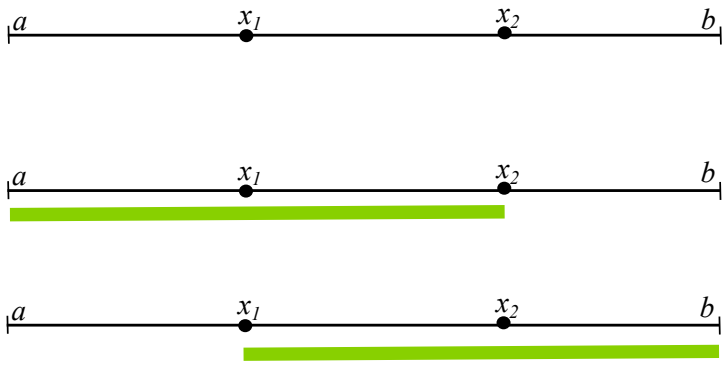
Ako je:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \tag{2.20}$$

onda je:

$$a = x_1, b = b$$

Time se određuje novi interval posmatranja (slika 2.9) i postupak se ponavlja do unaprijed definisanog broja eksperimenata.



Slika 2.9: Prikaz određivanja intervala pretrage Fibonaccijevom metodom.

Fibonaccijev algoritam je optimalan u smislu da daje najveći odnos između početnog i konačnog intervala za fiksni broj eksperimenata N.

Zadatak 6.

Data je funkcija:

$$f(x) = x^2 - 8x + 16$$

Potrebno je pronaći minimum Fibonaccijevom metodom uz šest iteracija na intervalu $[1, 7]$.

Rješenje zadatka 6:

Vrijednosti potrebnih parametara za izračun metode su:

$$\begin{aligned} N &= 6 \\ F_6 &= 13 \\ d_1 &= b - a = 7 - 1 = 6 \\ d_6 &= \frac{d_1}{F_6} = \frac{6}{13} = 0.46153 \end{aligned}$$

Početni opseg: $a_0 = 1$, $b_0 = 7$

Iteracija 1:

$$d_2 = \frac{F_5}{F_6} \cdot d_1 = \frac{8}{13} \cdot 6 = 3.6923$$

$$a_0 + d_2 = 4.6923 \quad \Rightarrow \quad f(4.6923) = 0.47927729$$

$$b_0 - d_2 = 3.3077 \quad \Rightarrow \quad f(3.3077) = 0.47927929$$

Budući da je $f(3.3077) > f(4.6923)$, interval se skraćuje s lijeve strane. Novi interval posmatranja je $[a_1, b_1] = [3.3077, 7]$

Iteracija 2:

$$d_3 = \frac{F_4}{F_6} \cdot d_1 = \frac{5}{13} \cdot 6 = 2.3077$$

$$a_1 + d_3 = 5.6154 \quad \Rightarrow \quad f(5.6154) = 2.60952$$

$$b_1 - d_3 = 4.6923 \quad \Rightarrow \quad f(4.6923) = 0.47927$$

Budući da je $f(5.6154) > f(4.6923)$, interval se skraćuje s desne strane. Novi interval posmatranja je $[a_2, b_2] = [3.3077, 5.6154]$

Iteracija 3:

$$d_4 = \frac{F_3}{F_6} \cdot d_1 = \frac{3}{13} \cdot 6 = 1.3846$$

$$a_2 + d_4 = 4.6923 \quad \Rightarrow \quad f(4.6923) = 0.4793$$

$$b_2 - d_4 = 4.2308 \quad \Rightarrow \quad f(4.2308) = 0.0533$$

Budući da je $f(4.6923) > f(4.2308)$, novi interval posmatranja je $[a_3, b_3] = [3.3077, 4.6923]$

Iteracija 4:

$$d_5 = \frac{F_2}{F_6} \cdot d_1 = \frac{2}{13} \cdot 6 = 0.9231$$

$$a_3 + d_5 = 4.2308 \quad \Rightarrow \quad f(4.2308) = 0.0533$$

$$b_3 - d_5 = 3.7692 \quad \Rightarrow \quad f(3.7692) = 0.0532$$

Budući da je $f(4.2308) > f(3.7692)$, novi interval posmatranja je $[a_4, b_4] = [3.3077, 4.2308]$

Iteracija 5:

$$d_6 = \frac{F_1}{F_6} \cdot d_1 = \frac{1}{13} \cdot 6 = 0.46153$$

$$a_4 + d_6 = 3.76923 \quad \Rightarrow \quad f(3.76923) = 0.05325$$

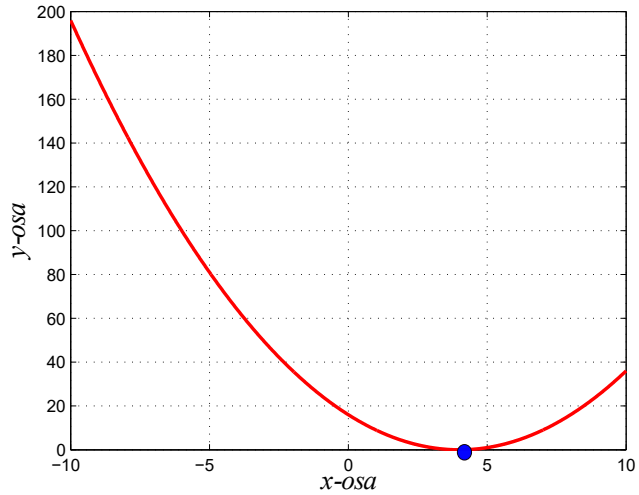
$$b_4 - d_6 = 3.76927 \quad \Rightarrow \quad f(3.76927) = 0.05323$$

Konačno nakon šest iteracija rezultantni interval za x varijablu je $[3.76923, 4.2308]$. Uobičajeno je da se rješenje aproksimira srednjom vrijednošću krajeva intervala:

$$x^* = \frac{3.76923 + 4.2308}{2} = 4.000015 \approx 4$$

$$f(x^*) = f(4) = 0$$

Dakle, nakon šest iteracija Fibonaccijevog pretraživanja, tačka minimuma je $(x^*,\ f(x^*)) = (4,\ 0)$. Na slici 2.10 prikazan je graf funkcije, dok je u tabeli 2.1 dat pregled rješenja po iteracijama.



Slika 2.10: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 8x + 16$ s prikazanim minimumom.

Tabela 2.1: Kompaktne iteracije Fibonaccijeve metode za $f(x) = x^2 - 8x + 16$.

Iteracija	Interval $[a_k, b_k]$	x_1	x_2	$f(x_1), f(x_2)$
1	[1.000, 7.000]	4.692	3.308	$0.4793, 0.4793$
2	[3.308, 7.000]	5.615	4.692	$2.6095, 0.4793$
3	[3.308, 5.615]	4.692	4.231	$0.4793, 0.0533$
4	[3.308, 4.692]	4.231	3.769	$0.0533, 0.0532$
5	[3.308, 4.231]	3.769	3.769	$0.05325, 0.05323$

Zadatak 7.

Data je funkcija:

$$f(x) = xe^x$$

Potrebno je pronaći minimum Fibonaccijevom metodom uz pet iteracija na intervalu $[-2, 0]$.

Rješenje zadatka 7:

Vrijednosti potrebnih parametara za izračun metode su:

$$\begin{aligned} N &= 5 \\ F_5 &= 5 \\ d_1 &= 2 \\ d_5 &= \frac{d_1}{F_5} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

Početni interval: $a_0 = -2$, $b_0 = 0$

Iteracija 1

$$d_2 = \frac{F_4}{F_5} \cdot d_1 = \frac{3}{5} \cdot 2 = 1.2$$

$$x_1 = a_0 + d_2 = -2 + 1.2 = -0.8 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = -0.8e^{-0.8} \approx -0.3595$$

$$x_2 = b_0 - d_2 = 0 - 1.2 = -1.2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = -1.2e^{-1.2} \approx -0.3614$$

Budući da je $f(x_2) < f(x_1)$, novi interval posmatranja je $[a_1, b_1] = [-2, -0.8]$.

Iteracija 2

$$d_3 = \frac{F_3}{F_5} \cdot d_1 = \frac{2}{5} \cdot 2 = 0.8$$

$$x_1 = a_1 + d_3 = -2 + 0.8 = -1.2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \approx -0.3614$$

$$x_2 = b_1 - d_3 = -0.8 - 0.8 = -1.6 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = -1.6e^{-1.6} \approx -0.3265$$

Budući da je $f(-1.2) < f(-1.6)$, novi interval posmatranja je $[a_2, b_2] = [-1.6, -0.8]$.

Iteracija 3

$$d_4 = \frac{F_2}{F_5} \cdot d_1 = \frac{1}{5} \cdot 2 = 0.4$$

$$x_1 = a_2 + d_4 = -1.6 + 0.4 = -1.2 \quad \Rightarrow \quad f(-1.2) \approx -0.3614$$
$$x_2 = b_2 - d_4 = -0.8 - 0.4 = -1.2 \quad \Rightarrow \quad f(-1.2) \approx -0.3614$$

Budući da su funkcije jednake, može se odbaciti bilo koja strana. Radi efikasnosti, zadržat će se tačka koja se ponavlja u sljedećoj iteraciji, da bi se izbjeglo ponovno računanje vrijednosti $f(x)$. Novi interval posmatranja je $[a_3, b_3] = [-1.2, -0.8]$.

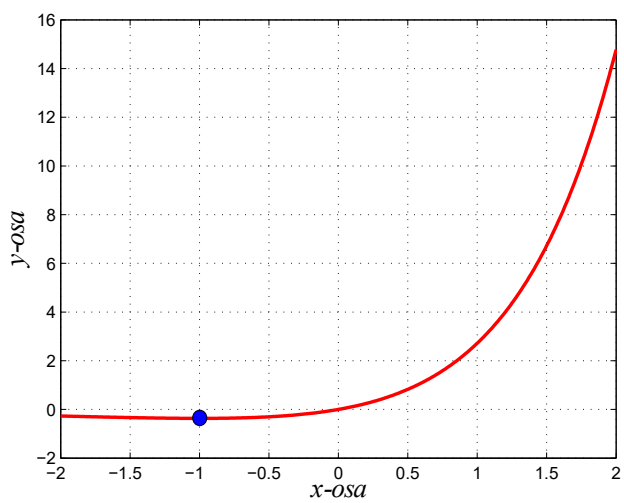
Iteracija 4

$$d_5 = \frac{F_1}{F_5} \cdot d_1 = \frac{1}{5} \cdot 2 = 0.4$$
$$x_1 = a_3 + d_5 = -1.2 + 0.4 = -0.8 \quad \Rightarrow \quad f(-0.8) \approx -0.3595$$
$$x_2 = b_3 - d_5 = -0.8 - 0.4 = -1.2 \quad \Rightarrow \quad f(-1.2) \approx -0.3614$$

Konačno nakon pet iteracija rezultantni interval za x varijablu je $[-1.2, -0.8]$. Tačka ekstrema je:

$$x^* = \frac{-1.2 + (-0.8)}{2} = -1.0$$
$$f(x^*) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0.3679$$

Na slici 2.11 prikazan je graf funkcije. U tabeli 2.2 je dat pregled rješenja po iteracijama.



Slika 2.11: Graf funkcije $f(x) = xe^x$ s prikazanim minimumom.

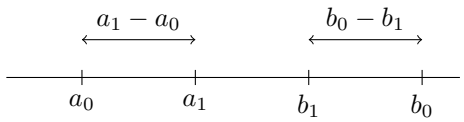
Tabela 2.2: Kompaktne iteracije Fibonaccijeve metode za $f(x) = xe^x$.

Iteracija	Interval $[a_k, b_k]$	x_1	x_2	$f(x_1), f(x_2)$
1	$[-2.000,\ 0.000]$	-0.800	-1.200	$-0.3595, -0.3614$
2	$[-2.000,\ -0.800]$	-1.200	-1.600	$-0.3614, -0.3265$
3	$[-1.600,\ -0.800]$	-1.200	-1.200	$-0.3614, -0.3614$
4	$[-1.200,\ -0.800]$	-0.800	-1.200	$-0.3595, -0.3614$

2.2.4 Metoda zlatnog reza

Metoda zlatnog reza predstavlja jednu od najefikasnijih tehnika za pronalaženje minimuma unimodalnih funkcija na zatvorenom intervalu. Procjena vrijednosti funkcije samo u srednjoj tački zadanog intervala ne može suziti raspon unutar kojeg se minimum nalazi. Ova metoda iterativno sužava interval pretraživanja procjenjujući funkciju u dvije tačke određene zlatnim rezom, čime se efikasno izolira ekstrem. Zlatni rez predstavlja podjelu dužine na dva dijela tako da je omjer kraćeg segmenta prema dužem jednak omjeru dužeg segmenta prema cijeloj dužini. Prema tome, vrši se procjena funkcije $f(x)$ u dvije tačke kao što je prikazano na slici 2.12, u smislu da je:

$$a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = \rho(b_0 - a_0), \quad \text{gdje je } \rho < \frac{1}{2}. \tag{2.21}$$



Slika 2.12: Odabir početnih tačaka za procjenu funkcije.

Nakon toga se računa vrijednost funkcije u tačkama a_1 i b_1. Ako je $f(a_1) < f(b_1)$ onda minimum mora ležati unutar intervala $[a_0, b_1]$. Ako je $f(a_1) \geq f(b_1)$ onda se minimum nalazi unutar intervala $[a_1, b_0]$, što je prikazano na slici 2.13.

Polazeći od reduciranog intervala, na sličan način se mogu odrediti i tačke a_2 i b_2 koristeći istu vrijednost $\rho < \frac{1}{2}$. Potrebno je smanjiti broj objektivnih procjena funkcije dok se smanjuje širina intervala nesigurnosti. Pretpostavimo da je $f(a_1) < f(b_1)$, tada znamo da $x^* \in [a_0, b_1]$. Kako je a_1 unutar nesigurnog intervala i $f(a_1)$ je već poznato, može se odabrati a_1 tako da se podudara sa b_2. Tada bi bila potrebna samo još jedna nova procjena funkcije f, i to u tački a_2. Vrijednost ρ koja omogućava rješenje uz samo jednu dodatnu procjenu funkcije f prikazana je na slici (2.13). U nastavku će se odrediti vrijednost ρ.

Bez gubitka na općenitosti pretpostavlja se da je zadani interval $[a_0, b_0]$ dužine 1. Da bi postojala samo jedna nova procjena funkcije f, dovoljno je da se odabere ρ tako da je:

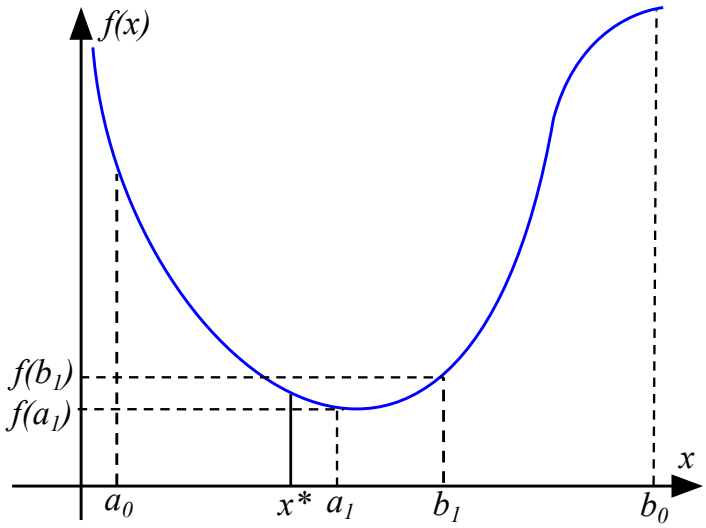
$$\rho(b_1 - a_0) = b_1 - b_2 \tag{2.22}$$

Kako je $(b_1 - a_0) = 1 - \rho$ i $(b_1 - b_2) = 1 - 2\rho$ može se pisati:

$$\rho(1 - \rho) = 1 - 2\rho \tag{2.23}$$

Time se dobije kvadratna jednačina oblika:

$$\rho^2 - 3\rho + 1 = 0 \tag{2.24}$$



Slika 2.13: Određivanje minimuma pomoću metode Zlatnog reza.

Rješenja ove kvadratne jednačine su:

$$\rho_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{2.25}$$

Kako je prema uslovu $\rho < \frac{1}{2}$, za rješenje se uzima:

$$\rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

Treba primijetiti da je:

$$1-\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1-\rho$$

Iz gore navedenog se vidi da vrijedi sljedeće:

$$\frac{\rho}{1-\rho} = 1-\rho \tag{2.26}$$

Podjela intervala u omjeru $\rho : 1-\rho$ se od strane Starih Grka naziva Zlatni rez, po čemu je ova metoda i dobila ime. Korištenjem pravila zlatnog reza svaka faza smanjenja intervala neizvjesnosti (osim prvog intervala) zahtjeva izračunavanje funkcije f u jednoj tački. Neizvjesnost intervala je reducirana sa $1-\rho = 0.61803$ u svakoj fazi. Dakle, N koraka redukcije korištenjem metode Zlatnog reza smanjuje interval za faktor:

$$(1-\rho)^N \approx (0.61803)^N. \tag{2.27}$$

Zadatak 8.

Data je funkcija:

$$f(x) = x^2 - 8x + 16$$

Potrebno je pronaći optimum metodom zlatnog reza na intervalu $[1, 4]$. Provesti četiri iterativna postupka. Za rješenje na kraju uzeti sredinu određenog intervala.

Rješenje zadatka 8:

Ulazni podaci su:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4, \quad \rho = 0.382, \quad (1 - \rho) = 0.618$$

Iteracija 1

$$a_1 = a_0 + \rho(b_0 - a_0) = 1 + 0.382 \cdot 3 = 2.146$$

$$b_1 = a_0 + (1 - \rho)(b_0 - a_0) = 1 + 0.618 \cdot 3 = 2.854$$

$$f(a_1) = 3.4373, \quad f(b_1) = 1.3133$$

Budući da je $f(a_1) \geq f(b_1)$, novi interval je $[a_1, b_1] = [2.146, 4]$.

Iteracija 2

$$a_2 = a_1 + \rho(b_1 - a_1) = 2.146 + 0.382 \cdot 1.854 = 2.8542$$

$$b_2 = a_1 + (1 - \rho)(b_1 - a_1) = 2.146 + 0.618 \cdot 1.854 = 3.2918$$

$$f(a_2) = 1.3128, \quad f(b_2) = 0.5015$$

Budući da je $f(a_2) \geq f(b_2)$, novi interval je $[a_2, b_2] = [2.8542, 4]$.

Iteracija 3

$$a_3 = a_2 + \rho(b_2 - a_2) = 2.8542 + 0.382 \cdot 1.1458 = 3.2919$$

$$b_3 = a_2 + (1 - \rho)(b_2 - a_2) = 2.8542 + 0.618 \cdot 1.1458 = 3.5623$$

$$f(a_3) = 0.5014, \quad f(b_3) = 0.1916$$

Budući da je $f(a_3) \geq f(b_3)$, novi interval je $[a_3, b_3] = [3.2919, 4]$.

Iteracija 4

$$a_4 = a_3 + \rho(b_3 - a_3) = 3.2919 + 0.382 \cdot 0.7081 = 3.5624$$

$$b_4 = a_3 + (1 - \rho)(b_3 - a_3) = 3.2919 + 0.618 \cdot 0.7081 = 3.7295$$

$$f(a_4) = 0.1915, \quad f(b_4) = 0.0730$$

Budući da je $f(a_4) \geq f(b_4)$, novi interval je $[a_4, b_4] = [3.5624, 4]$.

Rješenje se nalazi u intervalu:

$$3.5624 \leq x \leq 4$$

Prema postavci zadatka rješenje se nalazi kao sredina tog intervala:

$$x^* = \frac{3.5624 + 4}{2} = 3.7812$$

Vrijednost funkcije u toj tački je:

$$y^* = f(x^*) = 0.04.$$

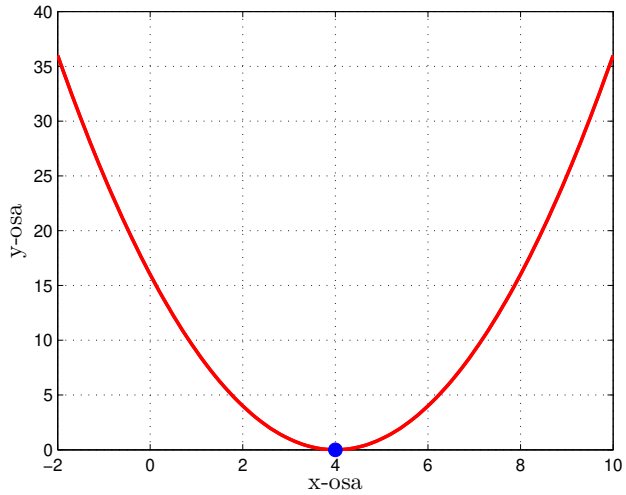
Na slici 2.14 prikazan je graf funkcije.

Zaključak:

Metoda zlatnog reza nakon četiri iteracije na intervalu $[1, 4]$ dala je približnu tačku minimuma

$$x^* \approx 3.7812, \qquad f(x^*) \approx 0.04.$$

Budući da je funkcija $f(x) = x^2 - 8x + 16$ kvadratna sa stvarnim minimumom u $x = 4$, ova vrijednost predstavlja približnu procjenu minimuma. Ako bi se nastavilo više iteracija, interval bi se dalje suzio i približilo bi se stvarnom minimumu $x = 4$. Pregled iteracija metodom zlatnog reza dat je u tabeli 2.3.



Slika 2.14: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 8x + 16$ s prikazanim minimumom.

Tabela 2.3: Iteracije metode zlatnog reza za $f(x) = x^2 - 8x + 16$.

Iteracija	Interval $[a_k, b_k]$	a_k	b_k	$f(a_k), f(b_k)$
1	$[1.000, 4.000]$	2.146	2.854	3.4373, 1.3133
2	$[2.146, 4.000]$	2.8542	3.2918	1.3128, 0.5015
3	$[2.8542, 4.000]$	3.2919	3.5623	0.5014, 0.1916
4	$[3.2919, 4.000]$	3.5624	3.7295	0.1915, 0.0730

Zadatak 9.

Za funkciju:

$$f(x) = x^2 - 6x + 15$$

potrebno je odrediti minimum primjenom metode zlatnog reza na intervalu $[0, 4]$, pri čemu je broj iteracija $N = 5$.

Rješenje zadatka 9:

Ulazni podaci su:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 4, \quad \rho = 0.382, \quad (1 - \rho) = 0.618$$

Iteracija 1

$$a_1 = a_0 + \rho(b_0 - a_0) = 0 + 0.382 \cdot 4 = 1.528$$
$$b_1 = a_0 + (1 - \rho)(b_0 - a_0) = 0 + 0.618 \cdot 4 = 2.472$$
$$f(a_1) = (1.528)^2 - 6 \cdot 1.528 + 15 = 2.334 - 9.168 + 15 = 8.166$$
$$f(b_1) = (2.472)^2 - 6 \cdot 2.472 + 15 = 6.112 - 14.832 + 15 = 6.279$$

Budući da je $f(a_1) \geq f(b_1)$, novi interval je $[a_1, b_1] = [1.528, 4]$.

Iteracija 2

$$a_2 = a_1 + \rho(b_1 - a_1) = 2.4720 \Rightarrow f(a_2) = 6.2788$$

$$b_2 = a_1 + (1 - \rho)(b_1 - a_1) = 3.0557 \Rightarrow f(b_2) = 6.0031$$

Budući da je $f(a_2) \geq f(b_2)$, novi interval je $[a_2, b_2] = [2.4720, 4]$.

Iteracija 3

$$a_3 = a_2 + \rho(b_2 - a_2) = 3.0557 \Rightarrow f(a_3) = 6.0031$$

$$b_3 = a_2 + (1 - \rho)(b_2 - a_2) = 3.4163 \Rightarrow f(b_3) = 6.1733$$

Budući da je $f(a_3) \leq f(b_3)$, novi interval je $[a_3, b_3] = [2.4720, 3.4163]$.

Iteracija 4

$$a_4 = a_3 + \rho(b_3 - a_3) = 2.8327 \Rightarrow f(a_4) = 6.0280$$

$$b_4 = a_3 + (1-\rho)(b_3 - a_3) = 3.0557 \Rightarrow f(b_4) = 6.0031$$

Budući da je $f(a_3) \geq f(b_3)$, novi interval je $[a_4, b_4] = [2.8327, 3.4163]$.

Iteracija 5

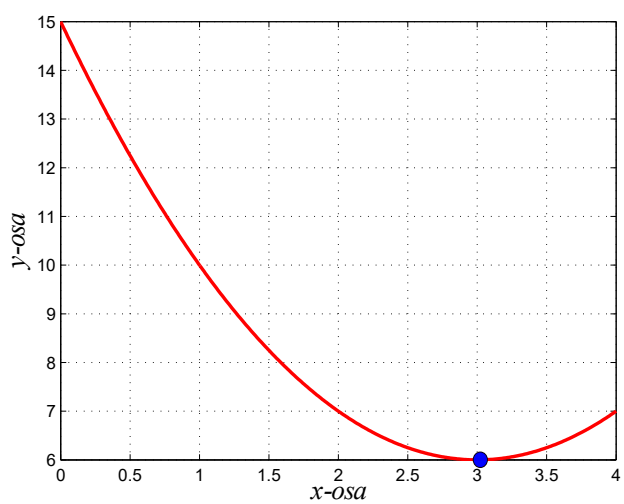
$$a_5 = a_4 + \rho(b_4 - a_4) = 3.0557 \Rightarrow f(a_4) = 6.0031$$

$$b_5 = a_4 + (1-\rho)(b_4 - a_4) = 3.1934 \Rightarrow f(b_4) = 6.0374$$

Budući da je $f(a_3) \leq f(b_3)$, novi interval je $[a_4, b_4] = 2.8327, 3.1934]$.
Konačno rješenje je:

$$x^* = \frac{a+b}{2} = \frac{2.8327 + 3.1934}{2} = 3.0131, \quad f(x^*) = 6.0002$$

Na slici 2.15 prikazan je graf funkcije. Pregled iteracija dat je u tabeli 2.4.



Slika 2.15: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 15$ s prikazanim minimumom.

Tabela 2.4: Iteracije metode zlatnog reza za $f(x) = x^2 - 6x + 15$.

Iteracija	Interval $[a_k, b_k]$	a_k	b_k	$f(a_k), f(b_k)$
1	$[0.000, 4.000]$	1.528	2.472	8.166, 6.279
2	$[1.528, 4.000]$	2.472	3.056	6.279, 6.003
3	$[2.472, 4.000]$	3.056	3.416	6.003, 6.173
4	$[2.472, 3.416]$	2.833	3.056	6.028, 6.003
5	$[2.833, 3.416]$	3.056	3.193	6.003, 6.037

Zadatak 10.

Primjenom metode Zlatnog reza odrediti podinterval unutar kojeg se nalazi minimum funkcije:

$$f(x) = x^2 + 2\sin x,$$

pri čemu je dužina reduciranog intervala manja od 0.2 ($\epsilon < 0.2$).

Rješenje zadatka 10:

Ulazni podaci su:

$$a_0 = -2, \quad b_0 = 2, \quad \rho = 0.382, \quad (1-\rho) = 0.618$$

Iteracija 1

$$a_1 = a_0 + \rho(b_0 - a_0) = 0 + 0.382 \cdot 4 = -0.4720$$
$$b_1 = a_0 + (1-\rho)(b_0 - a_0) = 0 + 0.618 \cdot 4 = 0.4720$$
$$f(a_1) = (a_1)^2 + 2\sin a_1 = (-0.4720)^2 + 2\sin(-0.4720) = -0.6866$$
$$f(b_1) = (b_1)^2 + 2\sin b_1 = (0.4720)^2 + 2\sin(0.4720) = 1.1321$$

Budući da je $f(a_1) \leq f(b_1)$, novi interval je $[a_1, b_1] = [-2.0000, 0.4720]$.

$$b_1 - a_1 = 2.4720 > 0.2$$

Iteracija 2

$$a_2 = a_1 + \rho(b_1 - a_1) = -1.0557 \Rightarrow f(a_2) = -0.6260$$

$$b_2 = a_1 + (1-\rho)(b_1 - a_1) = -0.4720 \Rightarrow f(b_2) = -0.6866$$

Budući da je $f(a_2) \geq f(b_2)$, novi interval je $[a_2, b_2] = [-1.0557, 0.4720]$.

$$b_2 - a_2 = 1.5277 > 0.2$$

Iteracija 3

$$a_3 = a_2 + \rho(b_2 - a_2) = -0.4720 \Rightarrow f(a_3) = -0.6866$$

$$b_3 = a_2 + (1-\rho)(b_2 - a_2) = -0.1116 \Rightarrow f(b_3) = -0.2102$$

Budući da je $f(a_3) \leq f(b_3)$, novi interval je $[a_3, b_3] = [-1.0557, -0.1116]$.

$$b_3 - a_3 = 0.9441 > 0.2$$

Iteracija 4

$$a_4 = a_3 + \rho(b_3 - a_3) = -0.6950 \Rightarrow f(a_4) = -0.7978$$

$$b_4 = a_3 + (1-\rho)(b_3 - a_3) = -0.4720 \Rightarrow f(b_4) = -0.6866$$

Budući da je $f(a_4) \leq f(b_4)$, novi interval je $[a_4, b_4] = [-1.0557, -0.4720]$.

$$b_4 - a_4 = 0.5837 > 0.2$$

Iteracija 5

$$a_5 = a_4 + \rho(b_4 - a_4) = -0.8327 \Rightarrow f(a_4) = -0.7861$$

$$b_5 = a_4 + (1-\rho)(b_4 - a_4) = -0.6950 \Rightarrow f(b_4) = -0.7978$$

Budući da je $f(a_5) \geq f(b_5)$, novi interval je $[a_5, b_5] = [-0.8327, -0.4720]$.

$$b_5 - a_5 = 0.3607 > 0.2$$

Iteracija 6

$$a_6 = a_5 + \rho(b_5 - a_5) = -0.6950 \Rightarrow f(a_5) = -0.7978$$

$$b_6 = a_5 + (1-\rho)(b_5 - a_5) = -0.6098 \Rightarrow f(b_5) = -0.7735$$

Budući da je $f(a_6) \leq f(b_6)$, novi interval je $[a_6, b_6] = [-0.8327, -0.6098]$.

$$b_6 - a_6 = 0.2229 > 0.2$$

Iteracija 7

$$a_7 = a_6 + \rho(b_6 - a_6) = -0.7476 \Rightarrow f(a_7) = -0.8009$$

$$b_7 = a_6 + (1 - \rho)(b_6 - a_6) = -0.6950 \Rightarrow f(b_7) = -0.7978$$

Budući da je $f(a_7) \geq f(b_7)$, novi interval je $[a_7, b_7] = [-0.8327, -0.6950]$.

$$b_7 - a_7 = 0.1377 < 0.2$$

Dakle, minimum se nalazi u intervalu $-0.8327 \leq x^* \geq -0.6950$.

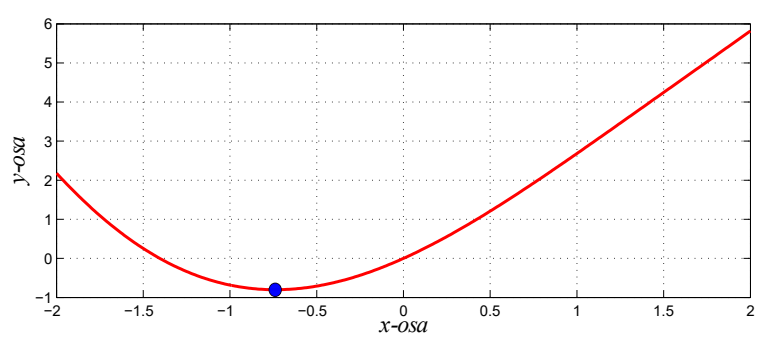
Konačno rješenje je:

$$x^* = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.8327 + (-0.6950)}{2} = \frac{-1.5277}{2} = -0.7639$$

$$f(x^*) = (-0.7639)^2 + 2\sin(-0.7639)$$

$$= 0.5835 + 2(-0.6911) = 0.5835 - 1.3822 = -0.7987$$

Na slici 2.16 prikazan je graf funkcije. Tabelarni prikaz iteracije je u 2.5.



Slika 2.16: Graf funkcije $f(x) = x^2 + 2\sin x$ sprikazanim minimumom.

Tabela 2.5: Iteracije metode zlatnog reza za $f(x) = x^2 + 2\sin x$.

Iteracija	Interval $[a_k, b_k]$	a_k	b_k	$f(a_k), f(b_k)$
1	$[-2.000, 2.000]$	-0.4720	0.4720	-0.6866, 1.1321
2	$[-2.000, 0.4720]$	-1.0557	-0.4720	-0.6260, -0.6866
3	$[-1.0557, -0.4720]$	-0.4720	-0.1116	-0.6866, -0.2102
4	$[-1.0557, -0.1116]$	-0.6950	-0.4720	-0.7978, -0.6866
5	$[-1.0557, -0.4720]$	-0.8327	-0.6950	-0.7861, -0.7978
6	$[-0.8327, -0.4720]$	-0.6950	-0.6098	-0.7978, -0.7735
7	$[-0.8327, -0.6098]$	-0.7476	-0.6950	-0.8009, -0.7978

Iz razmatranja navedenih postupaka može se zaključiti da metode jednodimenzionalnog pretraživanja, poput Fibonaccijeve metode i metode zlatnog reza, predstavljaju efikasan alat za lokalno pronalaženje minimuma unimodalnih nelinearnih funkcija, uz jasno definisane kriterije zaustavljanja.

3

Teorija optimizacije

SADRŽAJ

3.1 Bezuslovna optimizacija funkcije jedne promjenljive 47
3.2 Bezuslovna optimizacija funkcije dvije ili više promjenljivih 52
3.3 Uslovna optimizacija i Lagrange-ovi multiplikatori 61
3.3.1 Uslovna optimizacija tipa jednakosti 61
3.3.2 Uslovna optimizacija tipa nejednakosti 62

Teorija optimizacije bavi se proučavanjem metoda i principa kojima se traže najbolja (optimalna) rješenja za različite vrste problema. U ovom poglavlju bit će razmotreni osnovni pojmovi optimizacije, uključujući funkcije cilja, ograničenja, vrste ekstrema i metode za njihovo nalaženje. Posebna pažnja posvećena je određivanju stacionarnih tačaka i njihove prirode pomoću parcijalnih izvoda i Hessian matrice.

3.1 Bezuslovna optimizacija funkcije jedne promjenljive

Kod problema optimizacije bez ograničenja, osnovni uslov optimalnosti jeste egzistencija rješenja. Za početak se razmatra funkcija cilja sa jednom promjenljivom $f(x)$. Razlikuju se potrebni i dovoljni uslovi za postojanje rješenja. Ako je funkcija jedne promjenljive neprekidna, te je njen izvod neprekidna funkcija na posmatranom intervalu, potreban uslov za postojanje rješenja je [1]:

$$\frac{df}{dx} = 0 \tag{3.1}$$

Dovoljan uslov za postojanje rješenja dobija se iz vrijednosti drugog izvoda.

U slučaju kada je:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) > 0, \tag{3.2}$$

tačka x^* predstavlja minimum funkcije $f(x)$.
U slučaju kada je:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) < 0, \tag{3.3}$$

tačka x^* predstavlja maksimum funkcije $f(x)$.

Zadatak 11.

Odrediti maksimum funkcije jedne promjenljive, gdje je funkcija $f(x)$ zadana kao:

$$f(x) = x^2 e^x$$

Rješenje zadatka 11:

Da bi se odredio maksimum funkcije, neophodno je prvo pronaći stacionarne tačke, te odrediti prirodu tih tačaka (maksimum, minimum ili tačka infleksije) koristeći drugi izvod. Prvi izvod funkcije je:

$$\frac{df}{dx} = 2xe^x + x^2 e^x = 0$$

$$xe^x(2+x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0$$

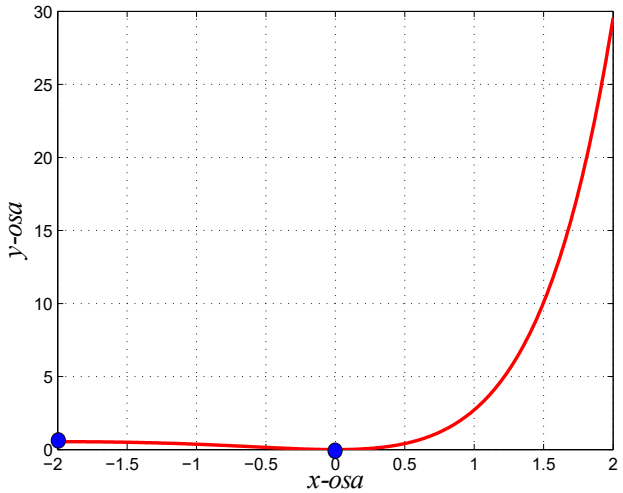
Primjećuje se da funkcija ima dvije stacionarne tačke $x_1 = -2$ i $x_2 = 0$. Potrebno je provjeriti drugi izvod da bi se odredila priroda stacionarnih tačaka.

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2 + 4x + x^2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(-2) = -2e^{-2} < 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(0) = 2 > 0$$

Pošto je drugi izvod negativan, tačka $x_1 = -2$ predstavlja maksimum funkcije u iznosu od $f(-2) = 4e^{-2}$, dok tačka $x_2 = 0$ predstavlja minimum funkcije u iznosu od $f(0) = 0$, budući da je drugi izvod pozitivan. Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na slici 3.1 sa označenim maksimumom i minimumom funkcije.



Slika 3.1: Graf funkcije $f(x) = x^2e^x$ s označenim ekstremima

Zadatak 12.

Odrediti ekstreme funkcije jedne promjenljive, gdje je funkcija $f(x)$ zadana kao:

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2 + x + 3$$

Rješenje zadatka 12:

Da bi se provjerilo da li funkcija ima ekstrem, računa se prvi izvod funkcije:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x^4 + 3x^2 + x + 3) = 20x^3 + 6x + 1$$

Stacionarne tačke se računaju izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 + 6x + 1 = 0$$

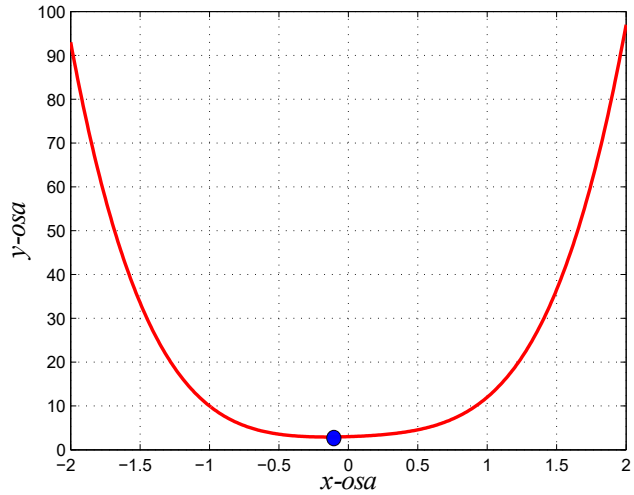
Ova kubna jednačina nema jednostavno analitičko rješenje, pa se rješava numerički (npr. metodama poput Newton-Raphsonove ili u softverima poput MATLAB-a). Dva korijena ove jednačine su konjugovano kompleksna, dok je jedan realan i to $x \approx -0.1543$.

Da bi se provjerila priroda ekstrema u tački $x \approx -0.1543$, potrebno je izračunati drugi izvod funkcije:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(20x^3 + 6x + 1) = 60x^2 + 6$$

Budući da je $f''(x) = 60x^2 + 6 > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, funkcija je konveksna. Funkcija ima jedan lokalni (i globalni) minimum u tački $M = (-0.1543, 3.0227)$.

Graf funkcije $f(x)$ prikazan je na slici 3.2 sa označenim minimumom funkcije.



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + x + 3$ s označenim minimumom.

3.2 Bezuslovna optimizacija funkcije dvije ili više promjenljivih

Neka je data funkcija dvije promjenljive $f(x_1, x_2)$. Potreban uslov za pronalazak ekstrema funkcije je postojanje stacionarnih tačaka.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \tag{3.5}$$

Rješenjem sistema se dobiju jedna ili više stacionarnih tačaka $S = (x_1, x_2)$ koje mogu, ali i ne moraju biti ekstremi. Dovoljan uslov za postojanje ekstrema određuje se na osnovu vrijednosti parcijalnih izvoda drugog reda u tački S [27].

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \tag{3.6}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.7}$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \tag{3.8}$$

$$D = AC - B^2 \tag{3.9}$$

Uvrštavanjem vrijednosti stacionarne tačke $S = (x_1, x_2)$ u jednačinu (3.9) dobija se informacija da li stacionarna tačka predstavlja ekstrem funkcije.

1. Ako je $D > 0$ funkcija ima ekstrem u tački S.
   (a) ako je $A > 0$ funkcija $f(x_1, x_2)$ ima minimum u tački S
   (b) ako je $A < 0$ funkcija $f(x_1, x_2)$ ima maksimum u tački S
2. Ako je $D < 0$ funkcija nema ekstrem u tački S.
3. Ako je $D = 0$ potrebno je ispitati ponašanje funkcije u okolini stacionarne tačke S.

Isti princip parcijalnih izvoda i provjere drugog reda može se proširiti na funkcije više promjenljivih pomoću Hessian matrice, koja generalizira kriterij D za više dimenzija.

Neka je data funkcija više promjenljivih $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Potreban uslov za pronalazak ekstrema funkcije je postojanje stacionarnih tačaka. Stacionarne

tačke se pronalaze parcijalnim izvodima po svakoj promjenljivoj, te izjednačavanjem istih sa vrijednosti 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Stacionarna tačka će se obilježiti sa $S = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Dovoljan uslov za ekstrem funkcije se dobije iz parcijalnih izvoda funkcije više promjenljivih i to na način da se formira Hessian matrica[1].

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Dovoljan uslov ekstrema će se pronaći pomoću Silvesterovog kriterija, kreirajući karakteristične minore od date matrice.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \\ &\vdots \\ H_n &= \det(H). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Priroda ekstrema se određuje uvrštavajući tačku $S = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ u minore matrice H i to na sljedeći način:

1. ako su svi $H_i > 0$ tada funkcija u tački S ima minimum
2. ako H_i naizmjenično mijenja znak i to na način $(+, -, +, -, \dots)$, tada funkcija u tački S ima maksimum
3. ukoliko nije ispunjen nijedan od navedenih uslova o prirodi ekstrema se ne može ništa reći.

Zadatak 13.

Odrediti stacionarne tačke i prirodu ekstrema funkcije dvije promjenljive, gdje je funkcija zadana kao:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2^2 - 6x_1 + 5$$

Rješenje zadatka 13:

Prvi korak je odrediti parcijalne izvode funkcije $f(x_1, x_2)$ po promjenljivim x_1 i x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2^2 - 6, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2 - 4x_1x_2, \tag{2}$$

Izjednačavanjem jednačina (1) i (2) sa 0 se dobija sistem:

$$x_1 - x_2^2 - 3 = 0, \tag{3}$$

$$2x_2 - x_1x_2 = 0, \tag{4}$$

Iz jednačine (4) se vidi da su moguća rješenja $x_1 = 2$ i $x_2 = 0$, jer rješenje proizlazi iz faktorizacije $2x_2(1 - x_1) = 0$. Uvrštavanjem vrijednosti $x_1 = 2$ u jednačinu (3) dobija se $x_2^2 = -1$, što ukazuje da x_2 nema realnih rješenja. Uvrštavanjem vrijednosti $x_2 = 0$ u jednačinu (3) dobija se $x_1 = 3$. Može se zaključiti da funkcija $f(x_1, x_2)$ ima samo jednu stacionarnu tačku $S = (3, 0)$.

Da bi se odredila priroda ekstrema funkcije, neophodno je pronaći druge izvode funkcije.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -4x_2,$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 8 - 4x_1.$$

Uvrštavanjem stacionarne tačke $S = (3, 0)$ u A, B i C se dobiju vrijednosti: $A = 2$, $B = 0$, $C = -4$. Pa je prema tome:

$D = AC - B^2 = -8 < 0$

Budući da je $D < 0$, stacionarna tačka $S = (3, 0)$ je sedlasta tačka, odnosno funkcija nema lokalni maksimum ili minimum u toj tački.

Zadatak 14.

Naći stacionarne tačke funkcije i odrediti njihovu prirodu, gdje je funkcija $f(x_1, x_2)$ zadana kao:

$f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2 + 12$

Rješenje zadatka 14:

Prvi korak je izračunati parcijalne izvode funkcije po promjenljivim x_1 i x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 + x_2^2 + 10x_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1x_2 + 2x_2. \tag{2}$$

Izjednačavanjem jednačina (1) i (2) sa 0 se dobije sistem:

$$6x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 = 0, \tag{3}$$

$$2x_1x_2 + 2x_2 = 0 \tag{4}$$

Iz jednačine (4) se vidi da je rješenje $x_2 = 0$ ili $x_1 = -1$. Uvrštavanjem vrijednosti $x_1 = -1$ u jednačinu (3) se dobije jednačina:

$$6 + x_2^2 - 10 = 0 \Rightarrow x_2^2 = 4, \tag{5}$$

čijim rješavanjem se dobije da je $x_2 = -2$ i $x_2 = 2$. Time su se dobile dvije stacionarne tačke $S_1(-1, -2), S_2(-1, 2)$.

Uvrštavanjem vrijednosti $x_2 = 0$ u jednačinu (3) se dobije jednačina:

$$6x_1^2 + 10x_1 = 0, \tag{6}$$

čijim rješavanjem se dobije da je $x_1 = 0$ i $x_1 = -\frac{5}{3}$. Time su se dobile druge dvije stacionarne tačke $S_3(0, 0), S_4(-\frac{5}{3}, 0)$.

Može se zaključiti da funkcija $f(x_1, x_2)$ ima četiri stacionarne tačke $S_1(-1, -2), S_2(-1, 2)$, $S_3(0, 0), S_4(-\frac{5}{3}, 0)$. U nastavku je potrebno ispitati njihovu prirodu, provjerom drugog parcijalnog izvoda.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1 + 10$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_2$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2x_1 + 2$$

Uvrštavanjem stacionarne tačke $S_1(-1,-2)$ u A, B i C se dobiju vrijednosti: $A=-2$, $B=-4$, $C=0$. Pa je prema tome:

$$D = AC - B^2 = 0 - 16 = -16 < 0$$

Budući da je $D<0$, funkcija $f(x_1,x_2)$ nema ekstrem u tački $S_1(-1,-2)$.

Uvrštavanjem stacionarne tačke $S_2(-1,2)$ u A, B i C se dobiju vrijednosti:$A=-2$, $B=4$, $C=0$. Pa je prema tome:

$$D = AC - B^2 = 0 - 16 = -16 < 0$$

Budući da je $D<0$, funkcija $f(x_1,x_2)$ nema ekstrem u tački $S_2(-1,2)$.

Uvrštavanjem stacionarne tačke $S_3(0,0)$ u A, B i C se dobiju vrijednosti:$A=10$, $B=0$, $C=2$. Pa je prema tome:

$$D = AC - B^2 = 20 - 0 = 20 > 0$$

Budući da je $D>0$ i $A=10>0$ funkcija $f(x_1,x_2)$ ima minimum u tački $S_3(0,0)$, koji iznosi $f=12$.

Uvrštavanjem stacionarne tačke $S_4(-\frac{5}{3},0)$ u A, B i C se dobiju vrijednosti:$A=-10$, $B=0$, $C=-\frac{4}{3}$. Pa je prema tome:

$$D = AC - B^2 = \frac{40}{3} - 0 = \frac{40}{3} > 0$$

Budući da je $D>0$ i $A=-10<0$ funkcija $f(x_1,x_2)$ ima maksimum u tački $S_4(-\frac{5}{3},0)$, koji iznosi $f=\frac{50}{3}\approx 16.67$.

Zadatak 15.

Odrediti ekstreme funkcije tri promjenljive, gdje je funkcija $f(x_1, x_2, x_3)$ zadana kao:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3 - 7x_1 - 23x_2 - x_3 + 43$$

Rješenje zadatka 15:

Prvo je potrebno odrediti parcijalne izvode funkcije $f(x_1, x_2, x_3)$ po promjenjivim x_1, x_2 i x_3.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + x_3 - 7 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 10x_2 - 4x_3 - 23 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 1 \tag{3}$$

Izjednačavanjem jednačina (1), (2) i (3) sa 0 se dobije sistem od tri jednačine. Rješenje sistema je: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ i $x_3 = 2$, što predstavlja stacionarnu tačku $S = (1, 3, 2)$. Sada se formira Hessian matrica:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Karakteristični minori iz matrice H su:

$$H_1 = 2$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 19$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 64$$

Kako su svi $H_i > 0$, funkcija u tački $S = (1, 3, 2)$ ima minimum, čija je vrijednost $f_{\min} = 4$.

Zadatak 16.

Odrediti tačku bezuslovnog ekstrema funkcije:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - 5x_1 - 12x_2 - 2x_3$$

Odrediti prirodu ekstrema i naći vrijednost funkcije $f(x_1, x_2, x_3)$ u toj tački.

Rješenje zadatka 16:

Tačka bezuslovnog ekstrema funkcije $f(x_1, x_2, x_3)$ određuje se iz uslova da je diferencijal prvog reda funkcije u toj tački jednak nuli, i to:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_3 - 5 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 12 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - x_1 - 2 \tag{3}$$

Izjednačavanjem sistema jednačina (1), (2) i (3) sa 0, te rješavanjem istog dobija se tačka bezuslovnog ekstrema: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ i $x_3 = 3$.

Sada je potrebno odrediti prirodu ekstrema na osnovu Hessian matrice. Potrebno je pronaći parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -1.$$

Prema tome, Hessian matrica je:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakteristični minori iz matrice H su: $H_1 = 2$, $H_2 = 4$ i $H_3 = 6$. Budući da su svi minori pozitivni slijedi da funkcija $f(x)$ ima minimum u tački $M(4, 6, 3)$. Vrijednost funkcije u tački M iznosi $f(M) = -49$.

Zadatak 17.

Za funkciju tri promjenljive $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 + x_3^2 + x_3 + 7$ odrediti stacionarne tačke funkcije, te provjeriti njihovu prirodu.

Rješenje zadatka 17:

Parcijalni izvodi funkcije $f(x_1, x_2, x_3)$ po promjenjivim x_1, x_2 i x_3 su:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 1 \tag{3}$$

Potencijalne tačke bezuslovnog ekstrema funkcije $f(x_1, x_2, x_3)$ određuju se iz uslova da je diferencijal prvog reda funkcije u stacionarnoj tački jednak nuli, tj. izjednačavanjem jednačina (1), (2) i (3) sa nulom. Iz jednačine (3) dobije se $x_3 = -\frac{1}{2}$, iz jednačine (2) dobije se $x_2 = 2$, dok se iz jednačine (1) dobije $x_1 = -1$ i $x_1 = 1$. Može se zaključiti da postoje dvije stacionarne tačke:

$$S_1 = (-1,\, 2,\, -\tfrac{1}{2}), \qquad S_2 = (1,\, 2,\, -\tfrac{1}{2}).$$

Sada se određuju drugi parcijalni izvodi.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Prema tome, Hessian matrica će izgledati kao:

$$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakteristični minori matrice H su:

$$H_1 = 6x_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12x_1$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24x_1$$

Uvrštavanjem stacionarnih tačaka $S_1 = (-1, 2, -\frac{1}{2})$ i $S_2 = (1, 2, -\frac{1}{2})$ u karakteristične minore se određuje priroda rješenja.

1. Za $S_1 = (-1, 2, -\frac{1}{2})$, vrijedi: $H_1 = -6 < 0$, $H_2 = 12 > 0$ i $H_3 = 24 > 0$, pa je tačka S_1 sedlasta tačka.
2. Za $S_2 = (1, 2, -\frac{1}{2})$, vrijedi: $H_1 = 6 > 0$, $H_2 = -12 < 0$ i $H_3 = -24 < 0$, pa je tačka S_2 sedlasta tačka.

3.3 Uslovna optimizacija i Lagrange-ovi multiplikatori

Ukoliko je skup vrijednosti koje mogu poprimiti varijable cijeli n-dimenzionalni prostor E^n onda se govori o bezuslovnom problemu optimizacije. U realnim problemskim situacijama postoje razna ograničenja pa se takvi problemi nazivaju problemima uslovne optimizacije. Ograničenja koja se nameću na problemske situacije mogu biti tipa jednakosti i nejednakosti.

Opšti oblik matematičkog modela problema uslovne optimizacije može se formulisati na sljedeći način:

Potrebno je odrediti maksimum ili minimum funkcije cilja

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.13}$$

pod uslovima definisanim sistemima jednačina i/ili nejednačina,

$$h_i(x) = h_i(x_1, x_2, ..., x_n) \begin{Bmatrix} \leq 0 \\ = 0 \\ \geq 0 \end{Bmatrix}, \tag{3.14}$$

gdje indeks i poprima vrijednosti $i = 1, 2, 3, ..., m$ u zavisnosti od broja ograničenja. Rješenje problema definisanog izrazima (3.13) i (3.14) se u opštem slučaju definiše kao zadatak iznalaženja vrijednosti n - dimenzionalnog vektora, odnosno tačke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u $n-$ dimenzionalnom Euklidovom prostoru E^n u kojoj funkcija cilja $f(x)$ ima određenu vrijednost, pri čemu je zadovoljen sistem ograničenja (3.14). Cilj rješavanja zadatka je da se na ovako definisanom skupu mogućih rješenja odredi tačka x^*, za koju važi da je:

$$f(x^*) = \text{Opt}\{f(x)\} \tag{3.15}$$

Tačka x^* se naziva optimalnom tačkom, pod uslovom da zadovoljava unaprijed definisana ograničenja problema, koja su definisana u opštem slučaju sistemom jednačina i/ili nejednačina (3.14).

Lagrange-ova metoda optimizacije funkcije $f(x)$ iz jednačine (3.13) podrazumijeva pronalaženje skupa promjenljivih $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za koje su zadovoljeni uslovi definisani skupom jednačina tipa jednakosti

$$h_i(x) = 0, i = 1, 2, 3, ..., m \tag{3.16}$$

a za koje funkcija $f(x)$ ima minimalnu ili maksimalnu vrijednost.

Ova metoda podrazumijeva formiranje proširene Lagrange-ove funkcije oblika [28]:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x), \tag{3.17}$$

gdje je λ vektor pomoćnih promjenljivih, odnosno Lagrange-ovih multiplikatora.

3.3.1 Uslovna optimizacija tipa jednakosti

U ovoj podsekciji se razmatra optimizacija funkcije više promjenljivih kada su prisutna ograničenja tipa jednakosti, što zahtijeva poseban pristup primjenom Lagrange-ovih multiplikatora.

Neka je zadat sljedeći problem:

$$\begin{aligned} &min\{f(x)\} \\ &h_i f(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., r \end{aligned} \tag{3.18}$$

Funkcije $h_i(x) = 0$, $i = 1, 2, ..., r$ predstavljaju ograničenja tipa jednakosti. Problem traženja minimuma funkcije n promjenljivih sa r ograničenja tipa jednakosti moguće je svesti na problem traženja minimuma funkcije $n + r$ promjenljivih bez ograničenja kreiranjem proširene funkcije kriterija:

$$f_a(x, f(\lambda)) = f(x) + \lambda_1 \cdot h_1 f(x) + \lambda_2 \cdot h_2 f(x) + \cdots + \lambda_r \cdot h_r(x) \tag{3.19}$$

gdje $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ predstavljaju Lagrange-ove multiplikatore.

Za određivanje minimuma proširene funkcije kriterija $f_a(f(x), f(\lambda))$ potrebno je pronaći stacionarne tačke. Stacionarne tačke Lagrange-ove funkcije dobijaju se postavljanjem njenih prvih parcijalnih izvoda jednakim nuli. Nakon toga se, pomoću odgovarajuće Hessianove matrice i analiza definitnosti u tim tačkama, određuje priroda rješenja, na način opisan u prethodnom podpoglavlju.

3.3.2 Uslovna optimizacija tipa nejednakosti

Kod uslovne optimizacije tipa nejednakosti potrebno je pronaći ekstrem funkcije, čija su ograničenja tipa nejednakosti. Ovo su najčešće pojave u realnim problemskim situacijama. Ovakav problem se može riješiti rastavljanjem na podprobleme, pomoću sljedeće procedure:

- Riješiti problem bez ograničenja. Sve stacionarne tačke koje zadovoljavaju svih m ograničenja postaju kandidati za tačke optimuma.
- Riješiti probleme kod kojih je po jedno od m ograničenja granično zadovoljeno. Sve tačke koje zadovoljavaju preostalih $m-1$ ograničenja postaju kandidati za tačke optimuma.
- Nastaviti rješavanje podproblema kod kojih je istovremeno granično zadovoljeno po $2, 3, ..., n$ od m ograničenja. Sve tačke koje zadovoljavaju preostala ograničenja postaju kandidati za tačke optimuma.
- Od svih kandidata pronaći tačke globalnih ekstremuma.

Neka je zadat sljedeći problem:

$$\begin{aligned} &\min\{f(x)\} \\ &g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{3.20}$$

Funkcije $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ predstavljaju ograničenja tipa nejednakosti. Uvođenjem *slack* varijabli mogu se ograničenja tipa nejednakosti prevesti u ograničenja tipa jednakosti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} g_i(x) \leq 0 \rightarrow g_i(x) + S_i^2(x) = 0 \\ g_i(x) \geq 0 \rightarrow g_i(x) - S_i^2(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Za svih m ograničenja tipa nejednakosti potrebno je uvesti po jednu *slack* varijablu (S_i). Slack varijable se uvode kao S_i da bi se naglasila nenegativna dopuna ograničenja. Sad se problem od n varijabli sa m ograničenja tipa nejednakosti sveo na problem od $n + m$ promjenljivih sa m ograničenja tipa jednakosti.

$$L(x, S, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) + S_i\big). \tag{3.22}$$

Zadatak 18.

Odrediti uslovni ekstrem funkcije $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 7$ primjenom Lagrange-ove metode uz uslov da je $3x_1 + x_2 = 4$.

Rješenje zadatka 18:

Prvo će se formirati proširena funkcija uzimajući u obzir ograničenje tipa jednakosti:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + 7 + \lambda(3x_1 + x_2 - 4)$$

Potom je potrebno pronaći parcijalne izvode Lagrangeove funkcije $L(x_1, x_2, \lambda)$ po promjenljivim x_1, x_2 i λ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 3\lambda, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x_1 + x_2 - 4. \tag{3}$$

Potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije $f(x_1, x_2)$ određuje se iz uslova da su parcijalni izvodi Lagrange-ove funkcije jednaki nuli, tj. izjednačavanjem jednačina (1), (2) i (4) sa nulom.

Kako bi se eliminisala promjenljiva λ, jednačina (2) se pomnoži sa -3, te se sabere sa jednačinom (1).

$$\begin{array}{c} 2x_2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 4x_1 + 3\lambda = 0 \\ -6x_2 - 3\lambda = 0 \end{array}\right\} + \\ 3x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{array} \tag{4}$$

Potom se sistem od tri jednačine i tri promjenljive svodi na sistem dvije jednačine i dvije promjenljive:

$$\begin{array}{c} 4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{array} \tag{5}$$

Metodom eliminacije promjenljive x_2, sistem od dvije jednačine se svodi na jednu.

$$22x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = \frac{12}{11}$$

Uvrštavanjem vrijednosti x_1 u jednu od dvije jednačine sistema (5) se dobije da je $x_2 = \frac{8}{11}$.

Stacionarna tačka je $S(\frac{12}{11}, \frac{8}{11})$.

Vrijednost Lagrangeovog multiplikatora λ nije potrebna za određivanje same stacionarne tačke u prostoru promjenljivih.

Da bi se odredila priroda ekstrema, potrebno je pronaći druge izvode proširene funkcije.

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 4$$

$$B = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2$$

$$D = AC - B^2 = 8$$

Budući je $D > 0$ i $A > 0$ funkcija $f(x_1, x_2)$ ima minimum u tački $S(\frac{12}{11}, \frac{8}{11})$, te taj minimum iznosi $f(S) \approx 9.91$.

Zadatak 19.

Data je funkcija kriterijuma

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Potrebno je odrediti tačku određenu presjekom ravni:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,$$

koja minimizira kriterij $f(x_1, x_2, x_3)$.

Rješenje zadatka 19:

Budući da se radi o uslovnom kriteriju, koristit će se Lagrange-ovi multiplikatori. Formirat će se proširena funkcija:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10) + \lambda_2(x_1 - x_2 + 2x_3 - 1)$$

Potom će se pronaći parcijalni izvodi proširene funkcije po promjenljivim $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2, \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2, \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2, \tag{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10, \tag{4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_2 + 2x_3 - 1, \tag{5}$$

Iz jednačine (2) slijedi:

$$\lambda_2 = 2x_2 + 2\lambda_1. \tag{6}$$

Ako se relacija (6) uvrsti u (1) i (3), dobije se:

$$2x_1 + \lambda_1 + 2x_2 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{-2x_1 - 2x_2}{3}, \tag{7}$$
$$2x_3 + 3\lambda_1 + 2(2x_2 + 2\lambda_1) = 4x_2 + 2x_3 + 7\lambda_1. \tag{8}$$

Uvrštavanjem (7) u (8) se dobije:

$$14x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \tag{9}$$

Relacija (9) zajedno sa relacijom(4) i (5) čine sistem od tri jednačine sa tri nepoznate:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 14x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Dati sistem će se riješiti koristeći Cramerovo pravilo.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 14 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 118$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 38$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 14 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 292$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 186$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_s} = \frac{38}{118} = 0.322$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_s} = \frac{292}{118} = 2.475$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta_s} = \frac{186}{118} = 1.576$$

Vrijednost kriterija je:

$$f(0{,}322,\ 2{,}475,\ 1{,}576) = (0.322)^2 + (2.475)^2 + (1.576)^2 = 8.715.$$

Zadatak 20.

Data je funkcija $G(x_1, x_2) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2$. Potrebno je odrediti tačku koja minimzira vrijednost ove funkcije, ako su ograničenja data sistemom nejednakosti:

$x_1 + x_2 \leq 6$	I ograničenje
$x_1 - x_2 \leq 1$	II ograničenje
$2x_1 + x_2 \geq 6$	III ograničenje
$0.5x_1 - x_2 \geq -4$	IV ograničenje
$x_1 \geq 1$	V ograničenje
$x_1 \geq 0$	VI ograničenje
$x_2 \geq 0$	VII ograničenje

Rješenje zadatka 20:

VI ograničenje se može odbaciti, jer je manje strožije od ograničenja V.

1. Prvo će se naći ekstrem date funkcije bez ograničenja, i to:

   $$\frac{dG}{dx_1} = 20(x_1 - 3.5) = 0$$

   $$\frac{dG}{dx_2} = 40(x_2 - 4) = 0$$

   Rješenje datog sistema je $x_1^{(1)} = 3.5 \wedge x_2^{(1)} = 4$. Pošto tačka $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ ne zadovoljava I ograničenje, ne uzima se u razmatranje.

2. Uzima se da je I ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $$x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 - x_2$$

   $$\frac{dG}{dx_2} = -20(6 - x_2 - 3.5) + 40(x_2 - 4) = 0 \Rightarrow x_2^{(2)} = 3.5 \wedge x_1^{(2)} = 2.5$$

   Data tačka zadovoljava sve uslove te se može uzeti u razmatranje.

   $$G\big(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\big) = 15.$$

3. Uzima se da je II ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $$x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + x_2$$

   $$\frac{dG}{dx_2} = 20(x_2 - 2.5) + 40(x_2 - 4) = 0 \Rightarrow x_2^{(3)} = 3.5 \Rightarrow x_1^{(3)} = 4.5$$

4. Uzima se da je III ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $2x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 2x_1$

   $$\frac{dG}{dx_1} = 20(x_1 - 3.5) + 160(x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_1^{(4)} = -0.5$$

   V ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

5. Uzima se da je IV ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $0.5x_1 - x_2 = -4 \Rightarrow x_1 = 2(x_2 - 4)$

   $$\frac{dG}{dx_2} = 40(2x_2 - 11.5) + 40(x_2 - 4) = 0 \Rightarrow x_2^{(5)} = 5.17 \Rightarrow x_1^{(5)} = 2.33$$

   I ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

6. Uzima se da je V ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $x_1^{(6)} = 1$

   $$\frac{dG}{dx_2} = 40(x_2 - 4) = 0 \Rightarrow x_2^{(6)} = 4$$

   Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije $G(x_1^{(6)}, x_2^{(6)}) = 62.5$.

7. Uzima se da je VII ograničenje granično zadovoljeno tj.

   $x_2^{(7)} = 0$

   $$\frac{dG}{dx_1} = 20(x_1 - 3.5) = 0 \Rightarrow x_1^{(7)} = 3.5$$

   II ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

8. Uzima se da su I i II ograničenje granično zadovoljeni tj.

   $x_1 + x_2 = 6$
   $x_1 - x_2 = 1$

   Prema tome je:

   $x_1^{(8)} = \frac{7}{2}$
   $x_2^{(8)} = \frac{5}{2}$

   Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije $G(x_1^{(8)}, x_2^{(8)}) = 45$.

9. Uzima se da su I i III ograničenje granično zadovoljeni tj.

   $x_1 + x_2 = 6$
   $2x_1 + x_2 = 6$

   tj. $x_1^{(9)} = 0 \wedge x_2^{(9)} = 6$. V ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

10. Uzima se da su I i IV ograničenje granično zadovoljeni tj.

    $x_1 + x_2 = 6$
    $0.5x_1 - x_2 = -4$

    Iz sistema slijedi da je:

    $x_1^{(10)} = 1.33$
    $x_2^{(10)} = 4.66$

    Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije $G(x_1^{(10)}, x_2^{(10)}) = 55.8$.

11. Uzima se da su I i V ograničenje granično zadovoljeni tj.

    $x_1 + x_2 = 6$
    $x_1 = 1$

    Iz sistema slijedi da je $x_1^{(11)} = 1 \wedge x_2^{(11)} = 5$. IV ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

12. Uzima se da su I i VI ograničenje granično zadovoljeni tj.

    $x_1 + x_2 = 6$
    $x_2 = 0$

    Iz sistema slijedi da je $x_1^{(12)} = 6 \wedge x_2^{(12)} = 5$. II ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

13. Uzima se da su II i III ograničenje granično zadovoljeni tj.

    $x_1 - x_2 = 1$
    $2x_1 + x_2 = 6$

    Iz sistema slijedi da je:

$x_1^{(13)} = \frac{7}{3}$
$x_2^{(13)} = \frac{4}{3}$

Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije $G(x_1^{(13)}, x_2^{(13)}) = 155.8$.

14. Uzima se da su II i IV ograničenje granično zadovoljeni tj.

$x_1 - x_2 = 1$
$0.5x_1 - x_2 = -4$

Iz sistema slijedi da je $x_1^{(14)} = 10 \wedge x_2^{(14)} = 9$. I ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

15. Uzima se da su II i V ograničenje granično zadovoljeni tj.

$x_1 - x_2 = 1$
$x_1 = 1$

Iz sistema slijedi da je $x_1^{(15)} = 1 \wedge x_2^{(15)} = 0$. III ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

16. Uzima se da su II i VI ograničenje granično zadovoljeni tj.

$x_1 - x_2 = 1$
$x_2 = 0$

Iz sistema slijede isti rezultati kao u slučaju **15°**. III uslov nije zadovoljen pa se tačka odbacuje.

17. Uzima se da su III i IV ograničenje granično zadovoljeni tj.

$2x_1 + x_2 = 6$
$0.5x_1 - x_2$

Iz sistema slijedi da je $x_1^{(17)} = 0.8 \wedge x_2^{(17)} 4.4$
V uslov nije zadovoljen pa se tačka odbacuje.

18. Uzima se da su III i V ograničenje granično zadovoljeni tj.

$2x_1 + x_2 = 6$
$x_1 = 1$

Iz sistema slijedi da je:

$x_1^{(18)} = 1$
$x_2^{(18)} = 4$

Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije je

$$G(x_1^{(18)}, x_2^{(18)}) = 62.5.$$

19. Uzima se da su III i VI ograničenje granično zadovoljeni tj.

$2x_1 + x_2 = 6$
$x_2 = 0$

Iz sistema slijedi da je:

$x_1^{(19)} = 3$
$x_2^{(19)} = 0$

II ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

20. Uzima se da su IV i V ograničenje granično zadovoljeni tj.

$0.5x_1 - x_2 = -4$
$x_1 = 1$

Iz sistema slijedi da je:

$x_1^{(20)} = 1$
$x_2^{(20)} = 4.5$

Data tačka zadovoljava sva ograničenja, te se može uzeti u razmatranje. U datoj tački vrijednost funkcije je

$$G(x_1^{(20)}, x_2^{(20)}) = 67.5.$$

21. Uzima se da su IV i VI ograničenje granično zadovoljeni tj.

$0.5x_1 - x_2 = -4$
$x_2 = 0$

Iz sistema slijedi da je:

$x_1^{(21)} = -8$
$x_2^{(21)} = 0$

V ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

22. Uzima se da su V i VI ograničenje granično zadovoljeni.

    Iz sistema slijedi da je:

    $x_1^{(22)} = 1$
    $x_2^{(22)} = 0$

    III ograničenje nije zadovoljeno, pa se tačka odbacuje.

    Na osnovu prethodne analize, vidi se da je vrijednost funkcije minimalna u tački

    $$x^* = (3.5,\ 2.5),$$

    te iznosi

    $$G(x^*) = 15.$$

Iz datog primjera jasno proizlazi da, kako bi se pronašli ekstremi funkcije koja je podložna određenim ograničenjima, nužno je istražiti sve moguće dopuštene granice na kojima bi se potencijalna rješenja mogla nalaziti, ne ograničavajući se samo na slobodne ekstreme. Ilustrirani primjer pokazuje da je neophodna neka metoda koja će ubrzati pretragu oblasti na efikasniji način.

Zadatak 21.

Primjenom Lagrange-ovih multiplikatora potrebno je odrediti vrijednost ekstrema funkcije:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

uz ograničenja:

$$x_1^2 + 4x_2^2 \leq 9, \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Rješenje zadatka 21:

Prvo je potrebno da ograničenja prevedemo u oblik jednakosti dodavanjem slack varijable i da ih zapišemo u obliku nula, tj. da ih izjednačimo sa nulom.

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + S_1^2 - 9 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - S_2^2 - 6 &= 0, \\ x_1 - S_3^2 &= 0, \\ x_2 - S_4^2 &= 0. \end{aligned}$$

Sada je proširena funkcija cilja :

$$\begin{aligned} f_p = {} & 2x_1^2 + 3x_2^2 \\ & + h_1\big(x_1^2 + 4x_2^2 + S_1^2 - 9\big) \\ & + h_2\big(3x_1 + 2x_2 - S_2^2 - 6\big) \\ & + h_3(x_1 - S_3^2) \\ & + h_4(x_2 - S_4^2) \end{aligned}$$

Parcijalni izvodi po svim promjenljivim su:

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1} = 4x_1 + 2h_1x_1 + 3h_2 + h_3 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial x_2} = 6x_2 + 8h_1x_2 + 2h_2 + h_4 = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial h_1} = x_1^2 + 4x_2^2 + S_1^2 - 9 = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial h_2} = 3x_1 + 2x_2 - S_2^2 - 6 = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial h_3} = x_1 - S_3^2 = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial h_4} = x_2 - S_4^2 = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial S_1} = 2h_1S_1 = 0 \tag{7}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial S_2} = -2h_2S_2 = 0 \tag{8}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial S_3} = -2h_3S_3 = 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial S_4} = -2h_4S_4 = 0 \tag{10}$$

Budući da jednačine $(7), (8), (9), (10)$ mogu biti zadovoljene za različite slučajeve, napravit će se tabela mogućih kombinacija vrijednosti 3.1.

Tabela 3.1: Tabela mogućih kombinacija vrijednosti h_i i S_i.

h_1	S_1	h_2	S_2	h_3	S_3	h_4	S_4
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0

U nastavku će se analizirati svaki pojedinačni slučaj.

1) $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$S_1^2 = 9 \geq 0$$
$$S_2^2 = -6 \leq 0 \qquad \text{ne zadovoljava uslov, ne mora se dalje provjeravati}$$

2) $h_1 = h_2 = h_3 = S_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$S_1^2 = 9 \geq 0$$
$$S_2^2 = -6 \leq 0 \qquad \text{ne zadovoljava uslov, ne mora se dalje provjeravati}$$

3) $h_1 = h_2 = S_3 = h_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 6x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ S_1^2 &= 9 \geq 0 \\ S_2^2 &= -6 \leq 0 \qquad \text{ne zadovoljava uslov, ne mora se dalje provjeravati} \end{aligned}$$

4) $h_1 = h_2 = S_3 = S_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ S_1^2 &= 9 \geq 0 \\ S_2^2 &= -6 \leq 0 \qquad \text{ne zadovoljava uslov, ne mora se dalje provjeravati} \end{aligned}$$

5) $h_1 = S_2 = h_3 = h_4 = 0$

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -\frac{4x_1}{3} \\ &6x_2 + 2h_2 = 0 \\ &3x_1 + 2x_2 = 6 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem h_2 u drugu jednačinu se dobije sistem:

$$-8x_1 + 18x_2 = 0, \quad 3x_1 + 2x_2 = 6$$

Rješenjem sistema se dobije:

$$x_2 = 0.69, \quad x_1 = 1.54$$

Provjerom slack varijabli:

$$S_1^2 = 4.75 \geq 0, \quad S_2^2 = 1.54 \geq 0, \quad S_4^2 = 0.69 \geq 0$$

$$f(1.54, 0.69) \approx 6.12$$

6) $h_1 = S_2 = h_3 = S_4 = 0$

$$x_2 = 0, \quad 3x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$$

Provjerom slack varijabli:

$$S_1^2 = 5 \geq 0, \quad S_3^2 = 2 \geq 0$$

$$f(2, 0) = 8$$

7) $h_1 = S_2 = S_3 = h_4 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3, \\ S_1^2 &= -27 \quad \Rightarrow \quad \text{ne zadovoljava uslov, ne mora se dalje provjeravati.} \end{aligned}$$

8) $h_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, 3x_1 + 2x_2 = 6$$

Moguća su dva slučaja:

$$\begin{aligned} (1)\text{: } x_1 = 0, x_2 = 3, \Rightarrow S_1^2 = -27 \geq 0 \\ (2)\text{: } x_1 = 2, x_2 = 0, \Rightarrow S_1^2 = 5 \leq 0 \end{aligned}$$

Sada je $f(2,0) = 8$.

9) $S_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$
U tom slučaju je:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2h_1x_1 &= 0 \\ 6x_2 + 8h_1x_2 &= 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 &= 9 \end{aligned}$$

Zbog prve jednačine će biti četiri slučaja:

(a) $x_1 = 3, x_2 = 0$

$$\begin{aligned} S_1^2 &= 0 \geq 0 \\ S_4^2 &= 0 \geq 0 \\ S_2^2 &= 3 \geq 0 \\ f(3,0) &= 18 \end{aligned}$$

(b) $x_1 = -3, x_2 = 0$

$$\begin{aligned} S_3^2 &= -3 \leq 0 \\ S_4^2 &= 0 \geq 0 \\ S_2^2 &= -15 \leq 0 \end{aligned}$$

(c) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} S_3^2 &= 0 \geq 0 \\ S_4^2 &= \frac{3}{2} \geq 0 \\ S_2^2 &= -3 \leq 0 \end{aligned}$$

(d) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$

$$S_4^2 = -\frac{3}{2} \leq 0$$
$$S_3^2 = 0 \geq 0$$

10) $S_1 = h_2 = h_3 = S_4 = 0$

$$x_2 = 0, x_1^2 = 9$$

Vidi se da postoje dva slučaja, koja su se već ponavljala iznad, stoga je:

$$x_1 = 3, x_2 = 0, \Rightarrow f(3,0) = 18 \geq 0 \tag{1}$$
$$x_1 = -3, x_2 = 0, \Rightarrow S_3^2 = -2 \leq 0 \tag{2}$$

11) $S_1 = h_2 = S_3 = h_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$x_1 = 0, 4x_2^2 = 9$$

Vidi se da postoje dva slučaja, koja su ista u prethodnim slučajevima:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow S_2^2 = -3 \leq 0 \tag{1}$$

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_4^2 = -\frac{3}{2} \leq 0 \tag{2}$$

12) $S_1 = h_2 = S_3 = S_4 = 0$
U ovom slučaju je:

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

Odakle proizilazi da je $S_2^2 = -6 \leq 0$

13) $S_1 = S_2 = h_3 = h_4 = 0$
Za ovaj slučaj je:

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 9 = 0 \tag{1}$$
$$3x_1 + 2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 - 3x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{6 - 3x_1}{2} \tag{2}$$

Nakon što se izraženi oblik iz jednačine (2) pošalje u prvu jednačinu, dobije se:

$$10x_1^2 - 36x_1 + 27 = 0$$

Rješenje ove kvadratne jednačine daje sljedeća dva slučaja:

$$x_1 = 1.065 \Rightarrow x_2 = 1.40 \Rightarrow f(1.065,\ 1.40) = 8.15$$
$$x_1 = 2.53 \Rightarrow x_2 = -0.8 \Rightarrow S_4^2 = -0.8 \leq 0$$

14) $S_1 = S_2 = h_3 = S_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$x_2 = 0, x_1^2 = 9$$

Ovaj slučaj je ispitan ranije, pa se zna da je: $f(3, 0) = 18$

15) $S_1 = S_2 = S_3 = h_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$x_1 = 0, 4x_2^2 = 9$$

Ovaj slučaj je ispitan ranije, pa se zna da uslovi nisu zadovoljeni.

16) $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$

U ovom slučaju je:

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

Ovaj slučaj je ispitan ranije, pa se zna da uslovi nisu zadovoljeni.

Sada iz svih razmotrenih slučajeva slijedi da je minimum najmanja vrijednost funkcije koju smo dobili, a maksimum najveća:

$$f_{\min}(1.54,\ 0.69) = 6.12, \quad f_{\max}(3,\ 0) = 18.$$

Pregled svih mogućih kombinacija h_i i S_i sa provjerom zadovoljavanja rješenja su prikazana u tabeli 3.2.

Tabela 3.2: Tabela mogućih kombinacija h_i i S_i sa provjerom zadovoljavanja rješenja.

h_1	S_1	h_2	S_2	h_3	S_3	h_4	S_4	$f(x_1, x_2)$
0	1	0	1	0	1	0	1	ne zadovoljava
0	1	0	1	0	1	1	0	ne zadovoljava
0	1	0	1	1	0	0	1	ne zadovoljava
0	1	0	1	1	0	1	0	ne zadovoljava
1	0	0	1	0	1	0	1	ne zadovoljava
1	0	0	1	0	1	1	0	ne zadovoljava
1	0	0	1	1	0	0	1	ne zadovoljava
1	0	0	1	1	0	1	0	ne zadovoljava
1	0	1	0	0	1	0	1	$f(3, 0) = 18$
1	0	1	0	0	1	1	0	$f(2, 0) = 8$
1	0	1	0	1	0	0	1	$f(1.54, 0.69) = 6.12$
1	0	1	0	1	0	1	0	ne zadovoljava

Zadatak 22.

Primjenom Lagrange-ovih multiplikatora potrebno je odrediti ekstreme funkcije $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 7$ na zatvorenoj oblasti Ω:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$10x_1 + 7x_2 \geq 15$$

$$x_1 \geq 1$$

Rješenje zadatka 22:

Uslovi se izražavaju kao jednačine dodavanjem slack varijabli:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + S_1^2 &= 10 \\ 10x_1 + 7x_2 - S_2^2 &= 15 \\ x_1 - S_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Proširena funkcija cilja je:

$$f_p = 2x_1^2 + x_2^2 + 7 + h_1(5x_1 + 2x_2 + S_1^2 - 10) + h_2(10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15) + h_3(x_1 - S_3^2 - 1)$$

Sada se određuju parcijalni izvodi za svaku promjenljivu:

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1} = 4x_1 + 5h_1 + 10h_2 + h_3 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_2} = 2x_2 + 2h_1 + 7h_2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial h_1} = 5x_1 + 2x_2 + S_1^2 - 10 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial h_2} = 10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial h_3} = x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial S_1} = 2h_1 S_1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial S_2} = -2h_2 S_2 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial S_3} = -2h_3 S_3 = 0 \tag{8}$$

Ispituju se svi slučajevi kombinacija aktivnih i neaktivnih ograničenja.

Budući da jednačine $(6), (7), (8)$ mogu biti zadovoljene za različite slučajeve, napravit će se tabela mogućih kombinacija vrijednosti 3.3.

Tabela 3.3: Tabela mogućih kombinacija vrijednosti h_i i S_i.

Redni broj	h$_1$	S_1	h_2	S_2	h_3	S_3	$(6),(7),(8)$
1°	0	1	0	1	0	1	0
2°	0	1	0	1	1	0	0
3°	0	1	1	0	0	1	0
4°	0	1	1	0	1	0	0
5°	1	0	0	1	0	1	0
6°	1	0	0	1	1	0	0
7°	1	0	1	0	0	1	0
8°	1	0	1	0	1	0	0

U nastavku će se analizirati svaki pojedinačni slučaj.

1° slučaj: $h_1 = h_2 = h_3 = 0$

U ovom slučaju je:

(1) $4x_1 + 5h_1 + 10h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$
(2) $2x_2 + 2h_1 + 7h_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,$
(3) $5x_1 + 2x_2 + S_1^2 - 10 = 0 \Rightarrow S_1^2 = 10 \geq 0,$
(4) $10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15 = 0 \Rightarrow S_2^2 = -15 \leq 0$ (ne zadovoljava uslov),
(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow S_3^2 = -1 \leq 0$ (ne zadovoljava uslov)

2° slučaj: $h_1 = h_2 = S_3 = 0$

(2) $2x_2 + 2h_1 + 7h_2 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

(3) $5x_1 + 2x_2 + S_1^2 - 10 = 0 \Rightarrow 5(1) + 2(0) + S_1^2 - 10 = 0 \Rightarrow S_1^2 = 5 \geq 0$

(4) $10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15 = 0 \Rightarrow 10(1) + 7(0) - S_2^2 - 15 = 0 \Rightarrow$

$S_2^2 = -5 \leq 0,$ ne zadovoljava uslov

(1) $4x_1 + 5h_1 + 10h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow 4(1) + 0 + 0 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = -4$

3° slučaj: $h_1 = S_2 = h_3 = 0$

(1) $4x_1 + 10h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -\dfrac{2x_1}{5}$, (2) $2x_2 + 7h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -\dfrac{2x_2}{7}$

Poređenjem: $-\dfrac{2x_1}{5} = -\dfrac{2x_2}{7} \Rightarrow x_2 = \dfrac{7x_1}{5}$

(4) $10x_1 + 7x_2 - 15 = 0 \Rightarrow 19.8x_1 = 15 \Rightarrow x_1 \approx 0.76$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow S_3^2 = -0.24 \leq 0$ (ne zadovoljava uslov)

4° slučaj: $h_1 = S_2 = S_3 = 0$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, (4) $10x_1 + 7x_2 - 15 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{5}{7} \approx 0.714$

(3) $5x_1 + 2x_2 + S_1^2 - 10 = 0 \Rightarrow S_1^2 = 3.572 \geq 0$

(2) $2x_2 + 2h_1 + 7h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = -\dfrac{10}{49} \approx -0.204$

(1) $4x_1 + 5h_1 + 10h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = -1.96$

U ovom slučaju: $y(1; 0,71) = 9.5$

5° slučaj: $S_1 = h_2 = h_3 = 0$

(1) $4x_1 + 5h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = -\dfrac{4x_1}{5}$, (2) $2x_2 + 2h_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{4x_1}{5}$

(3) $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow x_1 \approx 1.515$, $x_2 \approx 1.212$

(4) $10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15 = 0 \Rightarrow S_2^2 \approx 8.634 \geq 0$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow S_3^2 \approx 0.515 \geq 0$

U ovom slučaju: $y(1.515; 1.212) = 13.02$

6° slučaj: $S_1 = h_2 = S_3 = 0$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, (3) $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{5}{2} = 2.5$,

(4) $10x_1 + 7x_2 - S_2^2 - 15 = 0 \Rightarrow S_2^2 = 12.5 \geq 0$,

(2) $2x_2 + 2h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = -2.5$,

(1) $4x_1 + 5h_1 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = 8.5$

U ovom slučaju je: $y(1; 2.5) = 15.25$

7° slučaj: $S_1 = S_2 = h_3 = 0$

(3) $x_1 + 4x_2 - 5 = 0$, (4) $3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$

$\Rightarrow x_1 \approx 2.667, \qquad x_2 \approx -1.667,$

(5) $x_1 - S_3^2 = 0 \;\Rightarrow\; S_3^2 \approx 2.667 \geq 0,$

(2) $2x_2 + 2h_1 + 7h_2 = 0 \;\Rightarrow\; -3.334 + 2h_1 + 7h_2 = 0,$

(1) $4x_1 + 5h_1 + 10h_2 = 0 \;\Rightarrow\; 10.668 + 5h_1 + 10h_2 = 0,$

uslovi (1) i (2) ne mogu biti istovremeno zadovoljeni $\Rightarrow$ slučaj se odbacuje.

8° slučaj: $S_1 = S_2 = S_3 = 0$

(5) $x_1 - S_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,$
(3) $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow 5 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow x_2 = 2.5,$
(4) $10x_1 + 7x_2 - 15 = 0 \Rightarrow 10 + 17.5 - 15 = 12.5 \neq 0$ (uslov nije zadovoljen)

Pregled svih osam slučajeva sa njihovim rješenjima je dat u tabeli 3.4.

Tabela 3.4: Pregled rješenja za sve slučajeve – funkcija i uslovi optimalnosti.

Slučaj	**Vrijednosti varijabli i slack varijable**	**Validnost**
1°	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$ $S_1^2 = 10,\ S_2^2 = -15,\ S_3^2 = -1$	Nezadovoljen uslov
2°	$x_1 = 1,\ x_2 = 0$ $S_1^2 = 5,\ S_2^2 = -5,\ S_3^2 = 0$	Nezadovoljen uslov
3°	$x_1 \approx 0.76,\ x_2 \approx 1.064$ $S_3^2 = -0.24$	Nezadovoljen uslov
4°	$x_1 = 1,\ x_2 = 2.5$ $S_2^2 = 12.5,\ S_3^2 = 0$	Zadovoljen uslov
5°	$x_1 \approx 1.515,\ x_2 \approx 1.212$ $S_2^2 = 8.634,\ S_3^2 = 0.515$	Zadovoljen uslov
6°	$x_1 = 1,\ x_2 = 2.5$ $S_2^2 = 12.5,\ h_1 = -2.5,\ h_3 = 8.5$	Zadovoljen uslov
7°	$x_1 \approx 2.667,\ x_2 \approx -1.667$ Kontradikcija u (1) i (2)	Nezadovoljen uslov
8°	$x_1 = 1,\ x_2 = 2.5$ Kontradikcija u (4)	Nezadovoljen uslov

Može se zaključiti da je ekstrem maksimuma u tački $M(1.515; 1.212)$ i iznosi $f_{max} = 13.02$, dok je ekstrem minimuma u tački $S(1; 2,5)$ i iznosi $f_{min} = 9.5$.

Zadatak 23.

Neka komponenta ima nelinearnu karakteristiku $G(x)$ koju je potrebno aproksimirati polinomom drugog reda:

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \qquad 1 \leq x \leq 5.$$

Vrijednosti $G(x)$ dobivene mjerenjem u pet tačaka date su u tabeli 3.5. Zahtijeva se da u tački $x = 1$ vrijedi uslov:

$$P(1) = G(1).$$

Ako je kriterij dat kao:

$$f(a, b, c) = \sum_{k=2}^{5} \big[P(k) - G(k)\big]^2$$

Odrediti optimalnu vrijednost koeficijenata a, b, c koji minimiziraju ovaj kriterij.

Rješenje zadatka 23:

Tabela 3.5: Vrijednosti $G(x)$ za zadatak 23.

x	1	2	3	4	5
$G(x)$	3	5	4	2	1

Jednakost $P(1) = G(1)$ daje ograničenje oblika:

$$a + b + c = 3.$$

Zadatak se može riješiti metodom Lagrange-ovih multiplikatora. Formirat će se proširena funkcija cilja $f_a(a, b, c, h)$:

$$\begin{aligned} f_a(a, b, c, h) &= f(a, b, c) + h \cdot \big(a + b + c - 3\big) \\ &= \sum_{k=2}^{5} \big(ak^2 + bk + c - G(k)\big)^2 + h\,(a + b + c - 3). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Stacionarne tačke novoformirane funkcije $f_a(a, b, c, h)$ su:

$$\frac{\partial f_a}{\partial a} = 2 \sum_{k=2}^{5} k^2 (ak^2 + bk + c - G(k)) + h = 0,$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial b} = 2\sum_{k=2}^{5} k(ak^2 + bk + c - G(k)) + h = 0,$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial c} = 2\sum_{k=2}^{5} (ak^2 + bk + c - G(k)) + h = 0,$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial h} = a + b + c - 3 = 0.$$

Date jednačine predstavljaju sistem četiri linearne jednačine po promjenljivim a,b,c,h. Dati sistem je ekvivalentan sa:

$$2a\sum_{k=2}^{5} k^4 + 2b\sum_{k=2}^{5} k^3 + 2c\sum_{k=2}^{5} k^2 - 2\sum_{k=2}^{5} k^2 G(k) + h = 0$$

$$2a\sum_{k=2}^{5} k^3 + 2b\sum_{k=2}^{5} k^2 + 2c\sum_{k=2}^{5} k - 2\sum_{k=2}^{5} kG(k) + h = 0$$

$$2a\sum_{k=2}^{5} k^2 + 2b\sum_{k=2}^{5} k + 2c\sum_{k=2}^{5} 1 - 2\sum_{k=2}^{5} G(k) + h = 0$$

$$a + b + c - 3 = 0$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti se dobije:

$$\sum_{k=2}^{5} k^4 = 978, \quad \sum_{k=2}^{5} k^3 = 224, \quad \sum_{k=2}^{5} k^2 = 54, \quad \sum_{k=2}^{5} k = 14,$$

$$\sum_{k=2}^{5} k^2 G(k) = 113, \quad \sum_{k=2}^{5} kG(k) = 35, \quad \sum_{k=2}^{5} G(k) = 12.$$

Uvrštavanjem suma slijedi linearni sistem:

$$\begin{aligned} 1956a + 448b + 108c + h &= 226 \\ 448a + 108b + 28c + h &= 70 \\ 108a + 28b + 8c + h &= 24 \\ a + b + c &= 3. \end{aligned}$$

Redukovanjem (eliminišući h i zamjenom $c = 3 - a - b$) dobija se sistem za a i b:

$$\begin{aligned} 874a + 160b &= -49, \\ 160a + 30b &= -7, \\ c &= 3 - a - b. \end{aligned}$$

Rješenje metodom determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 874 & 160 \\ 160 & 30 \end{vmatrix} = 620, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} -49 & 160 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = -350,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 874 & -49 \\ 160 & -7 \end{vmatrix} = 1722.$$

Odavde slijedi:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \approx -0.5645, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \approx 2.777.$$

Uvrštavanjem u $c = 3 - a - b$:

$$c \approx 0.787.$$

Aproksimativni polinom glasi:

$$P(x) = -0.5645x^2 + 2.777x + 0.787.$$

Detaljna analiza navedenih zadataka ukazuje na složenost problema sa ograničenjima i opravdava potrebu za metodama koje omogućavaju brže i preglednije nalaženje optimalnih rješenja, što će biti predmet daljnjeg razmatranja.

4

Linearno programiranje

SADRŽAJ

4.1 Opšta formulacija zadataka linearnog programiranja 89
4.2 Svođenje na standardnu formu problema linearnog programiranja 93
4.3 Grafička metoda rješavanja linearnog programiranja 94
4.3.1 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću vršnih tačaka 95
4.3.2 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću funkcije prirasta 101
4.3.3 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću metode rebrenih varijacija 110
4.4 Primjena simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja 122
4.4.1 Problem degeneracije vršne tačke 131
4.4.2 Drugi tipovi degeneracije vršne tačke i metoda velikog M 141
4.4.3 Skaliranje problema linearnog programiranja 146
4.5 Primjena dualne simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja 151

Linearno programiranje (LP) predstavlja jednu od osnovnih metoda operacionih istraživanja, usmjerenu na pronalaženje optimalnih rješenja u problemima u kojima su funkcija cilja i ograničenja linearni. Ova metoda omogućava modeliranje i analizu različitih praktičnih problema, od optimizacije proizvodnje do raspodjele resursa, uz matematičku preciznost i jasnoću. Kroz poglavlje će biti prikazane osnovne formule, standardna forma problema LP, te grafičke i analitičke metode rješavanja linearnih problema.

4.1 Opšta formulacija zadataka linearnog programiranja

Linearno programiranje (LP) predstavlja metodu operacionih istraživanja koja se bavi iznalaženjem optimalnog rješenja problema. Karakteristično je po tome da su sve relacije između promjenljivih, kAKO U funkciji cilja $f(x)$, tako i u sklopu ograničenja Ω, linearna. Za matematički model problema linearnog programiranja se može reći: dat je skup od m linearnih jednačina i/ili nejednačina sa n promjenljivih, gdje treba pronaći nenegativne vrijednosti promjenljivih koje zadovoljavaju skup linearnih ograničenja Ω, a da pri tome funkcija $f(x)$, koja je također linearna, dobije svoju ekstremnu vrijednost. Opšta matematička formulacija zadataka LP-a, koristeći matematičke simbole, se može iskazati na sljedeći način [29] :

Treba odrediti takav skup vrijednosti $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, tj. komponente n-dimenzionalnog vektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ iz oblasti D koja je zadana sistemom linearnih jednačina i/ili nejednačina:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leq b_i, (i = 1, 2, ..., m) \tag{4.1}$$

$$x_k \geq 0, (k = 1, 2, ..., n)$$

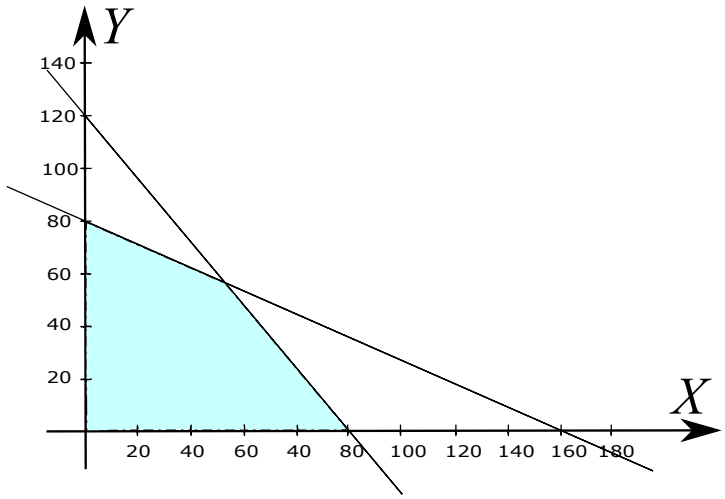
za koje funkcija cilja, koja predstavlja linearnu kombinaciju nepoznatih x_k

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n, \tag{4.2}$$

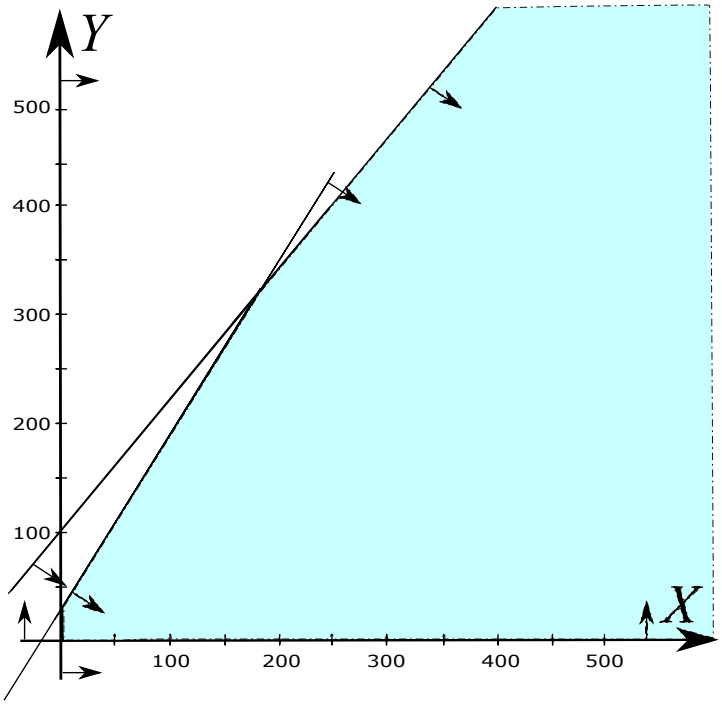
dostiže maksimalnu ili minimalnu vrijednost. Skup ograničenja u razvijenom obliku može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_k &\geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Skup ograničenja u n-dimenzionalnom prostoru određuje neku konačnu oblast (D) ograničenu površinama poliedra koja je konveksna i ograničena skupom hiperravni (slika 4.1). U određenim slučajevima oblast D može biti neograničena (slika 4.2).



Slika 4.1: Prikaz ograničene 2D oblasti pretraživanja.



Slika 4.2: Prikaz neograničene 2D oblasti pretraživanja.

Dati problem LP se lako može preoblikovati u matrični oblik matematičkog

modela, kao:

$$f(x) = C^T x \tag{4.4}$$

uz ograničenja oblika

$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \tag{4.5}$$

$$x \geq 0,$$

gdje C predstavlja n-dimenzionalni vektor red (vrstu), X je n-dimenzionalni vektor kolonu, A matricu sa m redova (vrsta) i n kolona, te b_i m - dimenzionalni vektor kolonu. Izgled prethodno opisanih matrica je sljedeći:

$$C^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Gdje su [30]:

- A_{mxn} se naziva *tehnološkom matricom*,
- Vektor C_{1xn} se naziva *vektorom cijena*,
- Elementi vektora C nazivaju se *koeficijenti kriterija* ili *koeficijenti funkcije cilja*,
- Ograničenja tipa $Ax \leq b$ se nazivaju *balansnim uslovima*,
- Vektor b_{mx1} se naziva *vektor resursa ili vektor slobodnih koeficijenata balansnih uslova*,
- Ograničenja tipa $x \geq 0$ se nazivaju *prirodnim ograničenjima*.

Stoga, za *standardnu formu* problema LP će se usvojiti problem:

$$f^* = max\{C^T x\} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x^* = \arg\max\ c^T x \quad \text{uz ograničenja} \quad \begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Rješavanje problema linearnog programiranja podrazumijeva iz beskonačno mnogo dozvoljenih rješenja iznaći ona koja ekstremiziraju funkciju $f(x)$.

4.2 Svođenje na standardnu formu problema linearnog programiranja

Opisani model u potpoglavlju 4.1 zapravo ne odgovara prirodnom obliku nekih problema linearnog programiranja. Svi linearni problemi mogu se svesti na usvojenu standardnu formu problema LP. Drugi legitimni oblici problema su sljedeći:

1. Minimiziranje umjesto maksimiziranja funkcije cilja:

$$f_1(x) = -f(x) = -C^T x = min\{f(x)\} = -max\{f_1(x)\} \tag{4.11}$$

   a) Riješiti slučaj kada je $f(x)$ u tački minimuma pozitivno

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -C^T x \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

   b) Riješiti slučaj kada je $f(x)$ u tački minimuma negativno

$$\begin{aligned} f_2(x) &= C^T x \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \leq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

   c) Odabrati rješenje koje daje manju vrijednost kriterija

2. Ako postoje ograničenja tipa $d_j \leq x_j$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_j - d_{j1} &\leq d_{j2} - d_{j1}, \\ x_{\alpha j} = x_j - d_{j1}, \quad b_{\alpha j} &= d_{j2} - d_{j1}, \\ 0 \leq x_{\alpha j} &\leq b_{\alpha j}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

3. Ako postoje ograničenja tipa $d_j \leq x_j$ pri čemu x_j može biti negativna:

$$\begin{aligned} d_j - x_j &\geq 0, \\ x_{\beta j} &= d_j - x_j, \\ x_{\beta j} &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4. Ako je x_j slobodno po znaku:

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j+} - x_{j-}, \\ x_{j+} &\geq 0, \\ x_{j-} &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

5. Ako postoje ograničenja tipa $d_{j1} \leq x_j \leq d_{j2}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_j - d_{j1} &\leq d_{j2} - d_{j1}, \\ x_{\alpha j} = x_j - d_{j1}, &\quad b_{\alpha j} = d_{j2} - d_{j1}, \\ 0 \leq x_{\alpha j} &\leq b_{\alpha j}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

6. Ako postoje ograničenja tipa $|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n| \leq b_i$:

$$-b_i \leq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i. \tag{4.18}$$

Nakon što se problem preoblikuje na standardnu formu, proces pronalaska ekstremne vrijednosti funkcije je isti.

4.3 Grafička metoda rješavanja linearnog programiranja

Da bi se govorilo o grafičkim metodama za rješavanje linearnih problema, neophodno je nešto više reći o geometriji linearnog programiranja. Grafička metoda za rješavanje problema linearnog programiranja prvenstveno se primjenjuje za probleme sa dvije ili tri promjenljive veličine. Sva razmatranja se vrše u dvodimenzionalnom odnosno trodimenzionalnom prostoru. Za probleme viših dimenzija, oblast se ne može vizualizirati, pa se stoga ova metoda ne koristi kod problema više dimenzionalnosti. Ograničenja tipa jednakosti se predstavljaju pravima, odnosno segmentima tih pravih, dok se ograničenja tipa nejednakosti predstavljaju poluravnima, odnosno njihovim segmentima u prvom kvadrantu koordinatnog sistema. Funkcija cilja se predstavlja pravom.

Kod problema sa tri promjenljive, grafička metoda je moguća, ali je njena primjena otežana. U tom slučaju se ograničenja tipa jednakosti predstavljaju ravnima, dok se ograničenja tipa nejednakosti predstavljaju odgovarajućim trodimenzionalnim poliedrima, odnosno njihovim segmentima u prvom kvadrantu koordinatnog sistema. Funkcija cilja se predstavlja pomoću ravni.

Prednost grafičke metode je u tome što se u dvodimenzionalnom prostoru lako uočavaju svojstva rješavanja problema linearnog programiranja, a matematičkim dokazivanjem se pokazuje da to važi za prostor bilo kojih dimenzija.

4.3.1 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću vršnih tačaka

Svako od $n + m$ ograničenja u problemu linearnog programiranja definiše jedan poluprostor u prostoru E^n. Poluprostor predstavlja skup tačaka s jedne strane hiperravni (npr. sve tačke koje zadovoljavaju nejednakost). Presjek svih tih poluprostora čini dozvoljeni skup rješenja. Ako je ovaj skup zatvoren i ograničen, onda se formira konveksni poliedar. Presjek n ograničenja definiše tačku u E^n, koja može biti vršna ili tzv. kvazivršna tačka. Vršna tačka zadovoljava i preostalih m ograničenja, dok kvazivršna tačka ne zadovoljava jedno ili više od tih preostalih ograničenja.

Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću vršnih tačaka je bazirano na teoremi koja glasi [9]:

Teorema 1 *Pod pretpostavkom da postoji konačan ekstremum funkcije $f(x)$, taj ekstremum se dostiže u barem jednoj vršnoj tački konveksnog skupa $\Omega \in E^n$. Ukoliko se ekstremum dostiže u više od jedne vršne tačke, tada isto vrijedi i za svaku linearnu konveksnu kombinaciju takvih vršnih tačaka (granicu skupa $\Omega \in E^n$).*

Na osnovu ove teoreme, pretraživanje skupa dozvoljenih vrijednosti se može ograničiti na pretraživanje vršnih tačaka.

Zadatak 24.

Nacrtati skup Ω zadan nejednakostima i odrediti maksimum funkcije cilja: $f(x) = 5x_1 + 2x_2$, ako je:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

metodom pretraživanja vršnih tačaka.

Rješenje zadatka 24:

Prvo će se izvršiti transformacija ograničenja iz skupa nelinearnih nejednačina u skup linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 5 \\ &x_1 = 0 \\ &x_1 = 2 \\ &x_2 = 0 \\ &x_2 = 4 \end{aligned}$$

Svaka jednačina predstavlja određenu pravu. Kako se razmatraju samo nenegativne vrijednosti promjenljivih (x_1, x_2), posmatraju se samo segmenti ovih pravih koje se nalaze u prvom kvadrantu koordinatnog sistema x_1Ox_2.

Da bi se nacrtali ovi segmenti određuju se presječne tačke pravih sa koordinatnim osama.

Prva prava ima svojstva:

$P_1 : x_1 + x_2 = 5$, iz $x_2 = 0$ slijedi da je $x_1 = 5$, odnosno $A_1 = (5, 0)$, a iz $x_1 = 0$ slijedi da je $x_2 = 5$, odnosno $B_1 = (0, 5)$.

Druga prava ima svojstva:

$P_2 : x_1 = 0$, presječna tačka sa apscisnom osom je $A_2 = (0, 0)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_2 = (0, 0)$.

Treća prava ima svojstva:

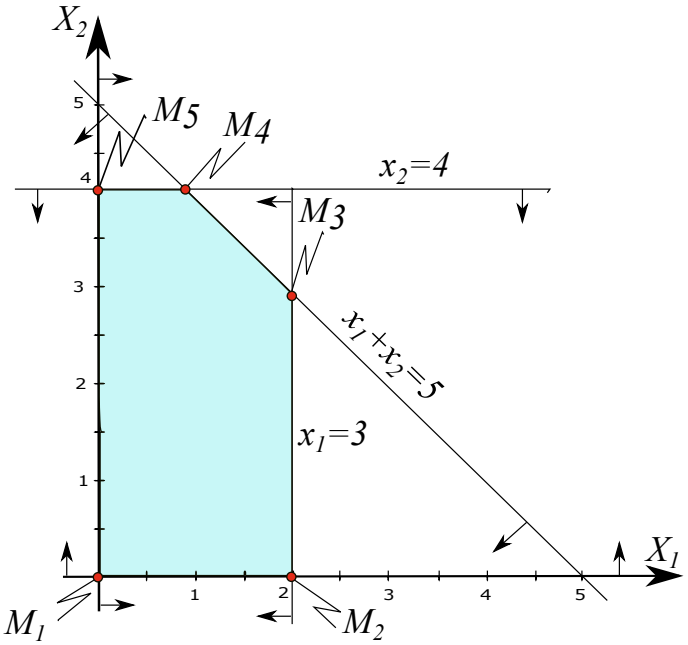
$P_3 : x_1 = 2$, presječna tačka sa apscisnom osom je $A_3 = (2, 0)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_3 = (2, \infty)$.

Četvrta prava ima svojstva:

$P_4 : x_2 = 0$, presječna tačka sa apscisnom osom je $A_4 = (0, 0)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_4 = (0, 0)$.

Peta prava ima svojstva:
$P_5 : x_2 = 4$, presječna tačka sa apscisnom osom je $A_5 = (\infty, 4)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_5 = (0, 4)$.

Na osnovu svega opisanog, nacrtana je oblast kao na slici 4.3. Ova oblast je posebno obilježena (osjenčena). Oblast mogućih rješenja je jedan konveksan skup, odnosno konveksni poliedar.



Slika 4.3: Oblast pretraživanja.

Tačke koje se nalaze na pravama zadovoljavaju ograničenja tipa jednakosti, a tačke koje se nalaze na određenim poluravnima, definisanim ovim ravnima, zadovoljavaju ograničenja tipa nejednakosti. Poluravan čije tačke zadovoljavaju nejednačine obilježena je usmjerenom strelicom na odgovarajućoj pravoj.

Budući da su $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$, rješenja zadovoljavaju uslov pozitivnosti. Znači, oblast dozvoljenih rješenja mora biti u prvom kvadrantu. To je oblast koja zadovoljava sva ograničenja iz skupa Ω.

Koordinate dobivenih vršnih tačaka ovog poliedra, kao i vrijednost funkcije cilja su:

$M_1(0,0) \Rightarrow f(M_1) = 0$
$M_2(0,4) \Rightarrow f(M_2) = 8$
$M_3(1,4) \Rightarrow f(M_3) = 13$
$M_4(2,3) \Rightarrow f(M_4) = 16$
$M_5(2,0) \Rightarrow f(M_5) = 10$

Uvrštavanjem svake tačke u funkciju cilja se vidi da je maksimum funkcije u tački $M_4(2,3)$ i iznosi 16.

Zadatak 25.

Odrediti nenegativne vrijednosti x_1 i x_2 za koje linearna forma:

$$f(x) = 3x_1 + x_2$$

ima minimalnu vrijednost uz ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 8x_1 + 6x_2 &\leq 48 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Riješiti problem minimizacije metodom pretraživanja vršnih tačaka.

Rješenje zadatka 25:

Prvo će se izvršiti transformacija ograničenja iz skupa nelinearnih nejednačina u skup linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \\ 8x_1 + 6x_2 &= 48 \end{aligned}$$

Svaka jednačina predstavlja određenu pravu.

Kako se razmatraju samo nenegativne vrijednosti promjenljivih (x_1, x_2), posmatraju se samo segmenti ovih pravih koje se nalaze u prvom kvadrantu koordinatnog sistema x_1Ox_2. Da bi se nacrtali ovi segmenti, određuju se presječne tačke pravih sa koordinatnim osama. Prva prava ima svojstva:

$P1 : x_1 + x_2 = 3$, iz $x_2 = 0$ slijedi da je $x_1 = 3$, odnosno $A_1 = (3, 0)$, a iz $x_1 = 0$ slijedi da je $x_2 = 3$, odnosno $B_1 = (0, 3)$.

Druga prava $P2 : x_1 = 2$, predstavlja vertikalni segment.

Treća prava $P3 : x_2 = 1$, predstavlja horizontalni segment.

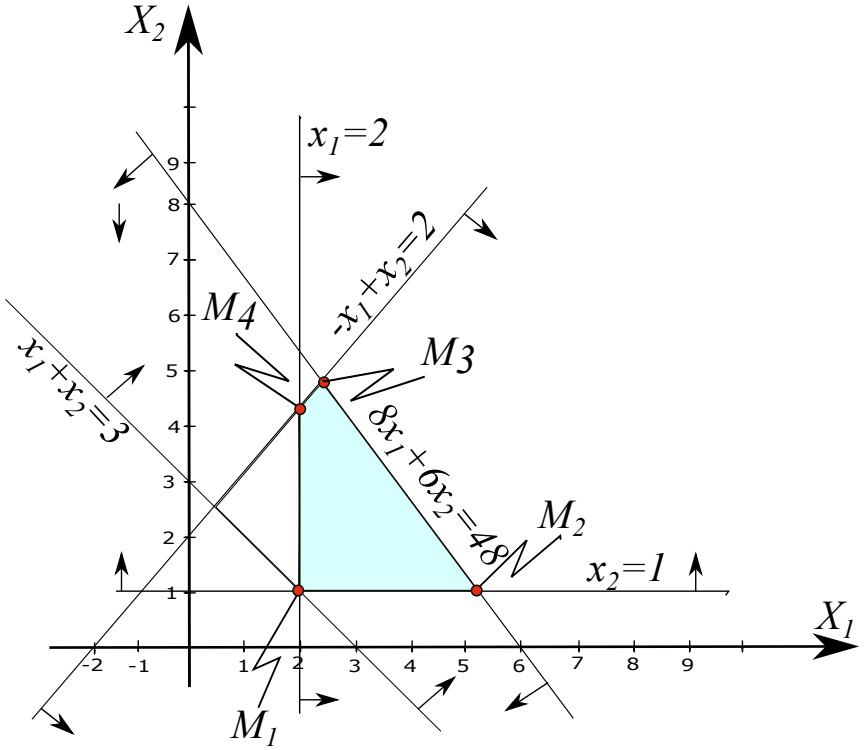
Četvrta prava ima svojstva:
$P4 : -x_1+x_2 = 2$, iz $x_2 = 0$ presječna tačka sa apscisnom osom je $A_4 = (-2, 0)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_4 = (0, 2)$.

Peta prava ima svojstva:
$P5 : 8x_1 + 6x_2 = 48$, presječna tačka sa apscisnom osom je $A_5 = (6, 0)$ i presječna tačka sa ordinatnom osom je $B_5 = (0, 8)$. Na osnovu svega opisanog, nacrtana je oblast kao na slici 4.4.

Oblast dozvoljenih rješenja zadovoljava sva ograničenja iz skupa Ω. Oblast mogućih rješenja je jedan konveksan skup, odnosno konveksni poliedar. Koordinate dobivenih vršnih tačaka ovog poliedra, kao i vrijednost funkcije cilja su:

$$
\begin{aligned}
M_1(2,1) &\Rightarrow f(M_1) = 7 \\
M_2(5.25,1) &\Rightarrow f(M_2) = 16.75 \\
M_3(2.5714,4.571) &\Rightarrow f(M_3) = 12.713 \\
M_4(2,4) &\Rightarrow f(M_4) = 10
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem svake vršne tačke u funkciju cilja, dobija se da je minimum funkcije u tački $M_1(2, 1)$ i iznosi 7. Oblast ograničenja, kao i tačka optimuma prikazani su na slici 4.4.



Slika 4.4: Oblast pretraživanja.

4.3.2 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću funkcije prirasta

Za rješavanje problema linearnog programiranja pomoću funkcije prirasta se polazi od linearne forme funkcije cilja, koja predstavlja familiju paralelnih pravih. Svaka prava predstavlja neku fiksnu vrijednost $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$. Raznim fiksnim vrijednostima odgovaraju razne prave, ali međusobno paralelne, jer je koeficijent pravca $(-c_1/c_2)$ nezavisan od vrijednosti $f(x)$. Rješenje problema se sastoji u određivanju one prave koja sa skupom dozvoljenih rješenja D ima bar jednu zajedničku tačku, a linearna forma postiže najveću moguću vrijednost. Da bi se grafički odredilo optimalno rješenje, mora se nacrtati prava koja će predstavljati funkciju cilja.

Često se, zbog praktičnih razloga crtanja, odnosno zbog težnje da se sve grafički predstavi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema, iz familije pravih koje predstavljaju funkciju cilja uzima za početno razmatranje prava koja prolazi kroz tačku iz oblasti dozvoljenih rješenja, kao i zbog toga što prava $f(x)$ mora imati bar jednu zajedničku tačku s oblašću dozvoljenih rješenja D.

Prilikom određivanja maksimuma funkcije cilja, pravac koji predstavlja funkciju cilja se pomjera paralelno samom sebi u smjeru povećanja vrijednosti funkcije cilja što je moguće dalje od koordinatnog početka, sve dok bar u jednoj tački dodiruje oblast dozvoljenih rješenja. Tačka koja se nalazi na kraju oblasti predstavlja traženi optimum.

Prilikom određivanja minimuma funkcije cilja, prava $f(x)$ se pomjera paralelno samoj sebi u smjeru opadanja vrijednosti funkcije cilja, da bude što je moguće bliže koordinatnom početku, sve dok ima bar jednu zajedničku tačku sa oblašću dozvoljenih rješenja. Tačka koja se nalazi na kraju oblasti predstavlja traženi optimum.

Zadatak 26.

Nacrtati skup Ω zadan nejednakostima i odrediti maksimum funkcije cilja: $f(x) = 5x_1 + 2x_2$, ako je:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

metodom prirasta funkcije.

Rješenje zadatka 26:

Budući da je oblast Ω ista kao u zadatku 24, postupak crtanja oblasti je prethodno objašnjen. Oblast je prikazana na slici 4.5.

Linearna forma:

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2$$

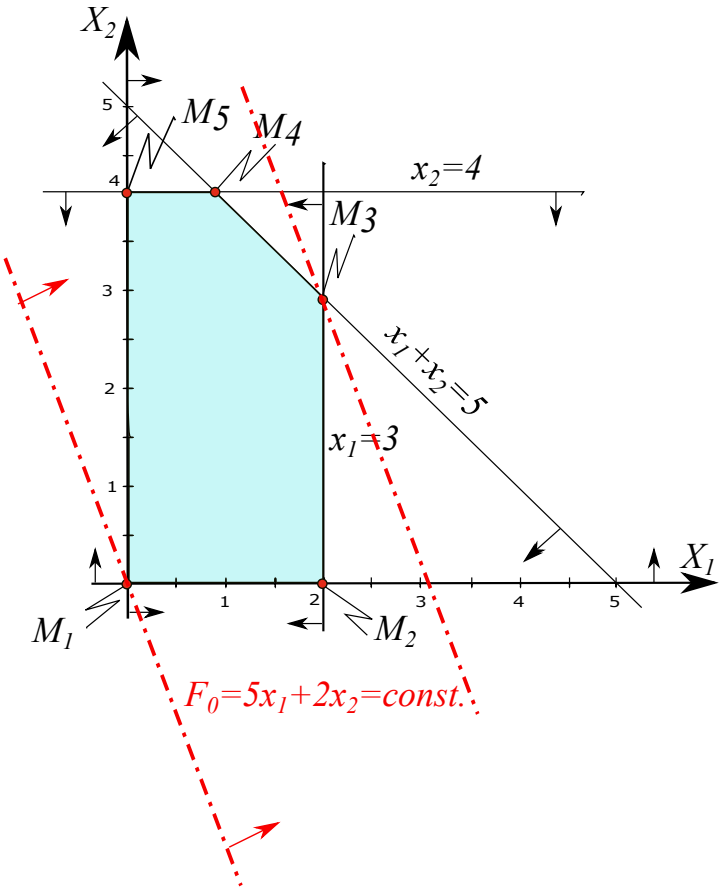
predstavlja familiju paralelnih pravih. Iz ove familije pravih se uzima prava koja prolazi kroz koordinatni početak ($S_1(0, 0)$), tj. prava koja predstavlja linearnu jednačinu:

$$f(x) = const.$$
$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\text{iz koje slijedi}$$
$$x_1 = -\frac{2x_2}{5}$$

Data tačka predstavlja prvu tačku kroz koju će se nacrtati pravac $f(x) = const$. Za određivanje druge tačke se uzima proizvoljno da je $x_1 = 1$, s obzirom da mora vrijediti da je:

$$f(1, x_2) = 5 + 2x_2 = const. = 0 => x_2 = -2.5,$$

Na takav način se dobila i druga tačka $S_2(2, -5)$. Potom je potrebno nacrtati dati pravac i pomjeriti ga paralelno do granice oblasti pretraživanja. Ovaj proces je ilustriran slikom 4.5. Prava je obilježena sa F_0 i izvučena linijom crta-tačka. Kao što se vidi sa grafičkog prikaza oblast pretraživanja završava sa tačkom $M_3(2, 3)$, koja ujedno predstavlja optimum datog problema, odnosno važi da je: $x^* = (2, 3)$ za koju je maksimalna vrijednost funkcije cilja:
$f^* = f(x^*) = \max\{f(x)\} = 5{x_1}^* + 2{x_2}^* = 16$



Slika 4.5: Traženje optimuma metodom prirasta funkcije cilja $f(x) = 5x_1 + 2x_2$).

Sada će se provjeriti da li ovo rješenje zadovoljava data ograničenja, odnosno da li ono pripada skupu mogućih rješenja.

$$
\begin{aligned}
{x_1}^* &= 2 \geq 0, \textit{zadovoljava} \\
{x_1}^* &= 2 \leq 2, \textit{zadovoljava} \\
{x_2}^* &= 3 \geq 0, \textit{zadovoljava} \\
{x_2}^* &= 3 \leq 4, \textit{zadovoljava} \\
{x_1}^* + {x_2}^* &= 2 + 3 = 5 \leq 5 \textit{zadovoljava}
\end{aligned}
$$

Zadatak 27.

Dat je problem linearnog programiranja. Funkcija cilja je: $f(x) = 3x_1 + 2x_2$, uz ograničenja:

$$\Omega : \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 3, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

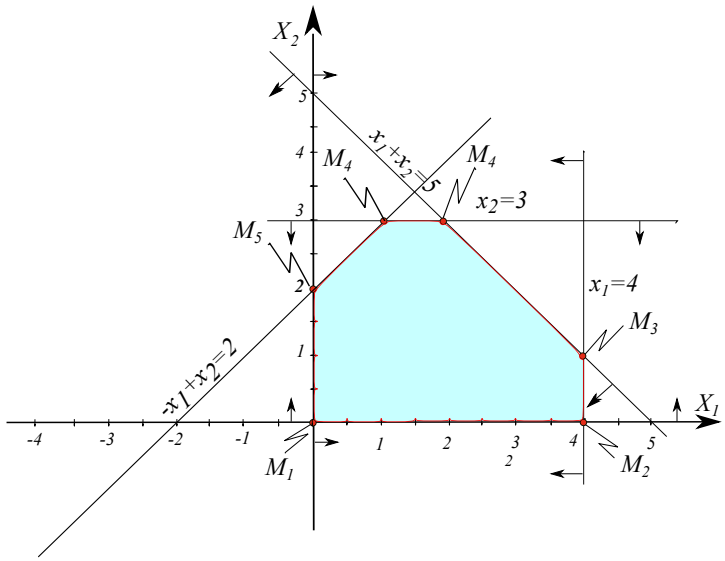
Potrebno je odrediti maksimum funkcije cilja:

a) metodom pretraživanja vršnih tačaka

b) metodom prirasta funkcije

Rješenje zadatka 27:

Grafičkim predstavljanjem pravih u koordinatnom sistemu x_1Ox_2 koje reprezentuju ograničenja u vidu jednačina se nalazi oblast mogućih rješenja D (slika 4.6).



Slika 4.6: Traženje optimuma metodom pretraživanja vršnih tačaka za funkciju $f(x) = 3x_1 + 2x_2$.

a) Metoda pretraživanja vršnih tačaka
Koordinate dobivenih vršnih tačaka ovog poliedra, kao i vrijednost funkcije cilja su:

$M_1(0,0) \Rightarrow f(M_1) = 0$
$M_2(4,0) \Rightarrow f(M_2) = 12$
$M_3(4,1) \Rightarrow f(M_3) = 14$
$M_4(2,3) \Rightarrow f(M_4) = 12$
$M_5(1,3) \Rightarrow f(M_5) = 9$
$M_6(0,2) \Rightarrow f(M_6) = 4$

Uvrštavanjem svake tačke u funkciju cilja se vidi (slika 4.6) da je maksimum funkcije u tački $M_3(4,1)$ i iznosi 14.

b) Metoda prirasta funkcije

Za rješavanje pomoću funkcije cilja se crta familija pravih $f(x) = const$. Prvo će se predstaviti pravac $f(x) = const$. Za početnu tačku se uzima ishodište koordinatnog sistema $S_1(0,0)$, te se računa:

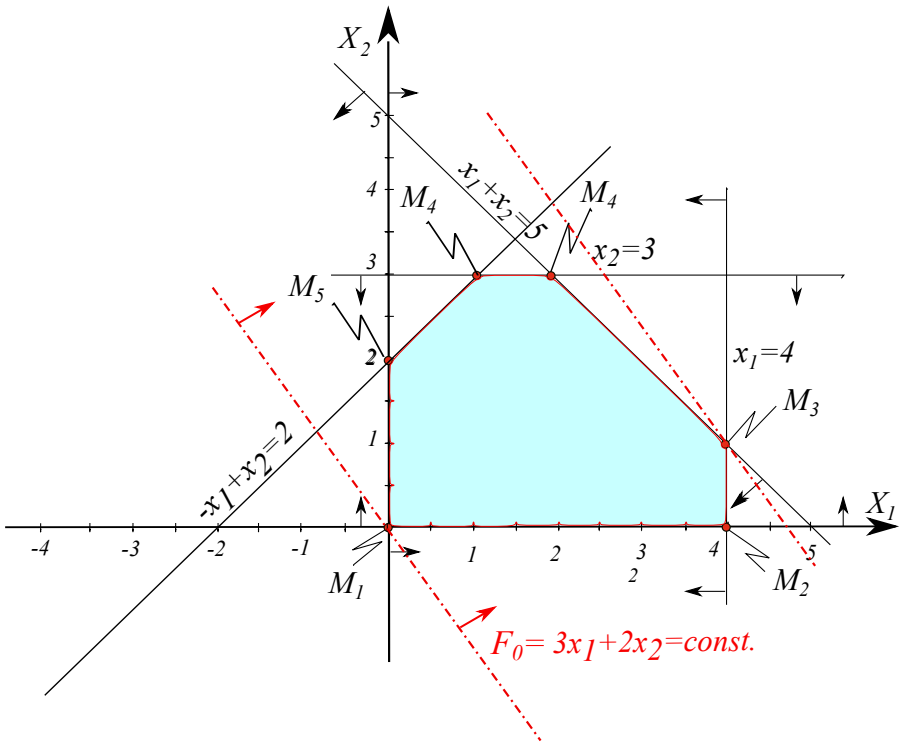
$$f(0,0) = 0 = const.$$

Za određivanje druge tačke se uzima proizvoljno da je $x_1 = 1$. S obzirom da mora vrijediti da je:

$$f(1, x_2) = 3 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2},$$

dobija se druga tačka $S_2(1, -\frac{3}{2})$.

Opisani proces je ilustriran slikom 4.7, prava je obilježena sa F_0 i izvučena linijom crta-tačka.



Slika 4.7: Traženje optimuma metodom pretraživanja vršnih tačaka za funkciju $f(x) = 3x_1 + 2x_2$.

Kao što se vidi sa grafičkog prikaza (slika 4.7) oblast pretraživanja završava sa tačkom $M_3(4, 1)$, koja ujedno predstavlja optimum datog problema, odnosno važi da je: $x^* = (4, 1)$ za koju je maksimalna vrijednost funkcije cilja:
$f^* = f(x^*) = max\{f(x)\} = 3{x_1}^* + 2{x_2}^* = 14$

Zadatak 28.

Riješiti problem linearnog programiranja sa funkcijom cilja je: $f(x) = 3x_1 + x_2$, uz ograničenja:

$$\Omega : \begin{cases} 20 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ -10 + x_1 + x_2 \geq 0, \\ 10 - x_2 \geq 0, \\ 5 \leq x_1 \leq 15 \end{cases}$$

Potrebno je odrediti maksimum funkcije cilja:

a) metodom pretraživanja vršnih tačaka

b) metodom prirasta funkcije

Rješenje zadatka 28:

Prvo će se ograničenja zapisati u nešto drugačijoj formi:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 15 \\ x_1 \geq 5 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

Grafičkim predstavljanjem pravih u koordinatnom sistemu x_1Ox_2 koje reprezentuju ograničenja u vidu jednačina nalazimo oblast mogućih rješenja D (slika 4.8).

a) Metoda pretraživanja vršnih tačaka
Koordinate dobivenih vršnih tačaka ovog poliedra, kao i vrijednost funkcije cilja su:

$M_1(10, 0) \Rightarrow f(M_1) = 30$
$M_2(15, 0) \Rightarrow f(M_2) = 45$
$M_3(15, 5) \Rightarrow f(M_3) = 50$
$M_4(10, 10) \Rightarrow f(M_4) = 40$
$M_5(5, 10) \Rightarrow f(M_5) = 25$

Uvrštavanjem svake tačke u funkciju cilja se vidi da je maksimum funkcije u tački $M_3(15, 5)$ i iznosi 50.

b) Metoda prirasta funkcije

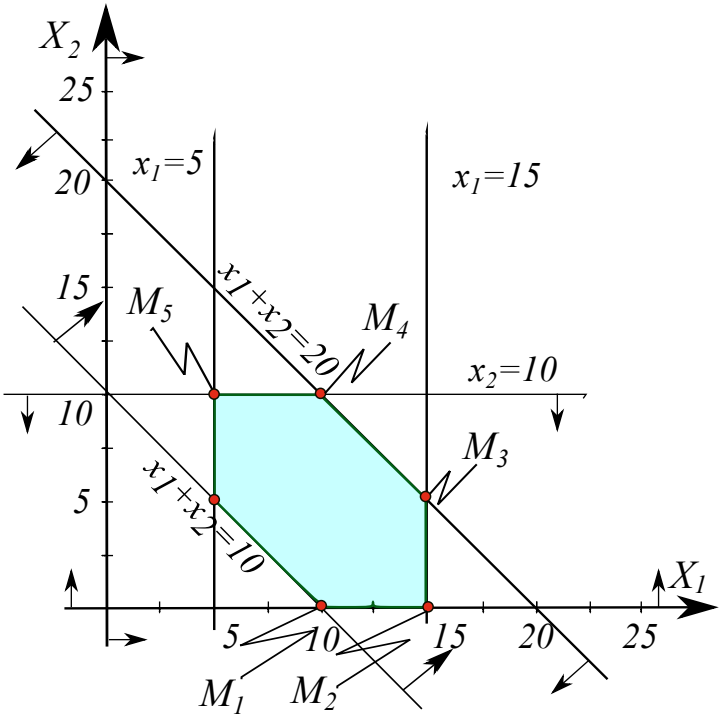
Za rješavanje pomoću funkcije cilja se crta familija pravih $f(x) = const$. Prvo će se predstaviti pravac $f(x) = const$. Kao početnu tačku se uzima ishodište koordinatnog sistema $S_1(0,0)$:

$$f(0,0) = 0 = const.$$

Za određivanje druge tačke se uzima proizvoljno da je $x_1 = 2$, s obzirom da mora vrijediti da je:

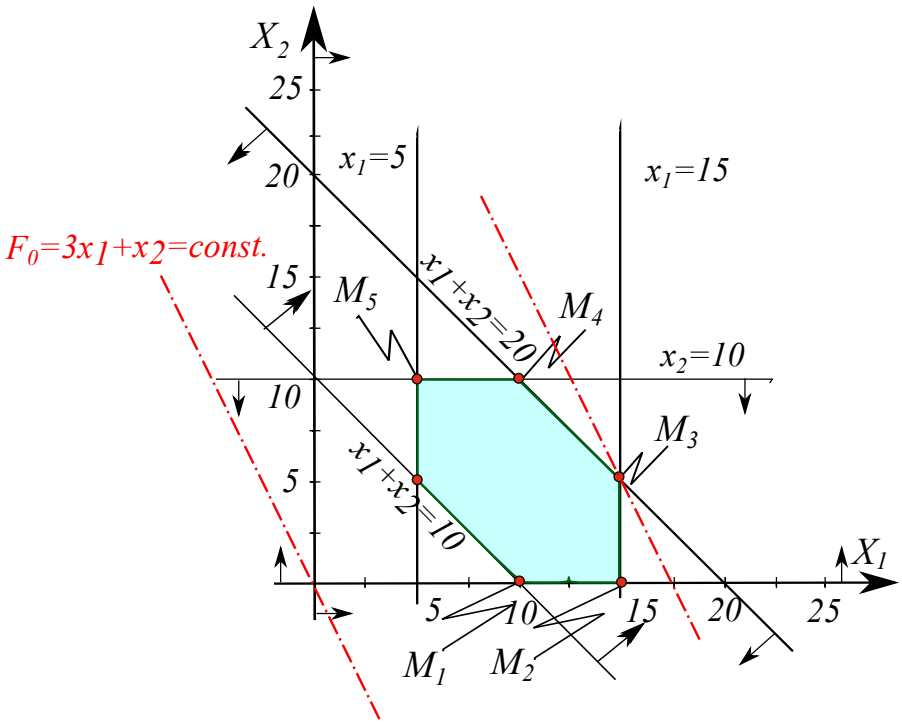
$$f(1, x_2) = 6 + 2x_2 = 0 => x_2 = -6,$$

čime se dobila druga tačka $S_2(2, -6)$.



Slika 4.8: Traženje optimuma metodom pretraživanja vršnih tačaka za funkciju $f(x) = 3x_1 + x_2$.

Opisani proces je ilustriran slikom 4.9, prava je obilježena sa F_0 i izvučena linijom crta-tačka.



Slika 4.9: Traženje optimuma metodom pretraživanja funkcije prirasta za funkciju $f(x) = 3x_1 + x_2$.

Kao što se vidi sa grafičkog prikaza oblast pretraživanja završava sa tačkom $M_3(15, 5)$, koja ujedno predstavlja optimum datog problema, odnosno važi da je: $x^* = (15, 5)$ za koju je maksimalna vrijednost funkcije cilja:
$f^* = f(x^*) = max\{f(x)\} = 3{x_1}^* + {x_2}^* = 50$

4.3.3 Rješavanje problema linearnog programiranja pomoću metode rebrenih varijacija

Kod metode rebrenih varijacija, mjesto gdje se traži vrijednost funkcije u svim tačkama, može se tražiti prirast funkcije u susjednim tačkama. Prirast se traži dok se ne nađe optimum.

Ako se pođe od matričnog zapisa funkcije cilja: $f(x) = C^T x$, onda je u svakoj iteraciji (kada se pronađe bolje rješenje) funkcija cilja:

$$f(x_i) = C^T x_i, \text{odnosno } f(x_{i+1}) = C^T x_{i+1}. \tag{4.19}$$

Prirast funkcije cilja u iteraciji može se zapisati kao [31]:

$$\begin{aligned} \Delta f(x)_{x^i \to x^{i+1}} &= f(x^{i+1}) - f(x^i) \\ &= C^T x^{i+1} - C^T x^i \\ &= C^T (x^{i+1} - x^i) \\ &= C^T \Delta x \Big|_{x^i \to x^{i+1}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

gdje je:

$$x^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{bmatrix}, x^{i+1} = \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ \vdots \\ x_n^{i+1} \end{bmatrix}, \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Neka trenutna tačka iteracije bude $x^i = M_i$. Iz te tačke generišu se sve moguće susjedne tačke

$$\{M_i^1, M_i^2, \ldots, M_i^k\}$$

koje se dobiju kretanjem duž svake varijable. Za svaku susjednu tačku računa se prirast funkcije cilja:

$$\Delta f_i^j = f(M_i^j) - f(M_i) = C^T (M_i^j - M_i) = C^T \Delta M_i^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.22}$$

Zatim se odabire iduća tačka $x^{i+1} = M_i^{j^*}$ koja daje maksimalni (ili minimalni, zavisno od problema) prirast:

$$x^{i+1} = M_i^{j^*}, \quad \text{gdje je } j^* = \arg\max_j \Delta f_i^j. \tag{4.23}$$

Proces se završava kada su svi priraštaji funkcije cilja

$$\Delta f_i^j \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

ili jednaki nuli za sve j.

Zadatak 29.

Ako je zadana sljedeća funkcija cilja: $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$, i ako je oblast mogućih rješenja ograničena sa:

$$\Omega : \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 240, \\ x_1 \leq 30, \\ x_2 \leq 60, \\ x_3 \leq 40, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Naći maksimum ovako definisanog problema:

a) metodom pretraživanja vršnih tačaka

b) metodom rebrenih varijacija

Rješenje zadatka 29:

a) Metoda pretraživanja vršnih tačaka

Grafičkim predstavljanjem pravih u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu x_1, x_2, x_3 koje reprezentuju ograničenja u vidu jednačina se nalazi oblast mogućih rješenja D (slika 4.10).

Budući da je trodimenzionalni prostor, u nastavku će se dataljno objasniti način crtanja ograničenja.

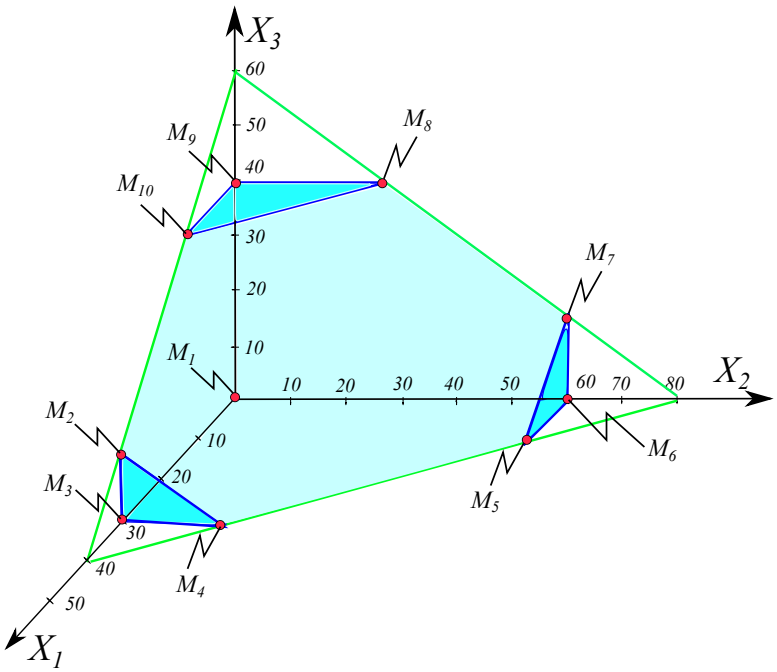
Prvo ograničenje u vidu jednačina predstavlja ravan

$$P_1 : 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 240.$$

- Za $x_2 = x_3 = 0$, slijedi $x_1 = \frac{240}{6} = 40$, tj. $A_1 = (40, 0, 0)$,
- Za $x_1 = x_3 = 0$, slijedi $x_2 = \frac{240}{3} = 80$, tj. $B_1 = (0, 80, 0)$,
- Za $x_1 = x_2 = 0$, slijedi $x_3 = \frac{240}{4} = 60$, tj. $C_1 = (0, 0, 60)$.

Važno je napomenuti da tačke A sa odgovarajućim indeksima predstavljaju presjeke ravni sa koordinatnom osom x_1, tačke B sa koordinatnom osom x_2 i tačke C sa koordinatnom osom x_3. Pored predstavljene ravni, neophodno je nacrtati i standardna ograničenja tj.:

$$\begin{gathered} x_1 \leq 30 \\ x_2 \leq 60 \\ x_3 \leq 40 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$



Slika 4.10: Prikaz trodimenzionalne oblasti pretraživanja za funkciju $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$.

Poliedar dozvoljenih rješenja je prikazan na slici 4.10.

Koordinate vršnih tačaka su redom:

$M_1(0, 0, 0)$,
$M_2(30, 0, 15)$,
$M_3(30, 0, 0)$,
$M_4(30, 20, 0)$,
$M_5(10, 60, 0)$,
$M_6(0, 60, 0)$,
$M_7(0, 60, 15)$,
$M_8(0, 26.66, 40)$,
$M_9(0, 0, 40)$,
$M_{10}(13.33, 0, 40)$

Vrijednosti funkcije cilja $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$ u vršnim tačkama su:

$f(M_1) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$
$f(M_2) = 100 \cdot 30 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 15 = 7500$
$f(M_3) = 100 \cdot 30 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 3000$
$f(M_4) = 100 \cdot 30 + 200 \cdot 20 + 300 \cdot 0 = 7000$
$f(M_5) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 60 + 300 \cdot 0 = 13000$
$f(M_6) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 60 + 300 \cdot 0 = 12000$
$f(M_7) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 60 + 300 \cdot 15 = 16500$
$f(M_8) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 26.66 + 300 \cdot 40 = 17332$
$f(M_9) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 40 = 12000$
$f(M_{10}) = 100 \cdot 13.33 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 40 = 13333$

Iz izračunatih vrijednosti funkcije u pojedinim tačkama, vidi se da je maksimum funkcije u tački $M_8(0, 26.66, 40)$ i iznosi 17332.

b) Metoda rebrenih varijacija

<u>*1. korak*</u>: za početnu tačku će se uzeti $x^0 = M_1 = \{0, 0, 0\} \Rightarrow f(M_1) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$. Moguća su tri smjera kretanja iz početne tačke M_1, a to su:

I) $M_1 = \{0, 0, 0\} \rightarrow M_3 = \{30, 0, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^0 = \{30, 0, 0\}$, stoga je $\Delta f_1^0 = 100 \cdot (30) + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 3000$

II) $M_1 = \{0, 0, 0\} \rightarrow M_6 = \{0, 60, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^0 = \{0, 60, 0\}$, stoga je $\Delta f_2^0 = 100 \cdot (0) + 200 \cdot 60 + 300 \cdot 0 = 12000$

III) $M_1 = \{0, 0, 0\} \rightarrow M_9 = \{0, 0, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_3^0 = \{0, 0, 40\}$, stoga je $\Delta f_3^0 = 100 \cdot (0) + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 40 = 12000$

Iz navedena tri slučaja slijedi da je maksimalni prijelaz ostvaren u slučaju II i III koji su ravnopravni. Budući da su oba prijelaza jednako povoljna, izbor između njih je proizvoljan, ali će se, radi potpunijeg razmatranja metode, analizirati obje varijante. U prvoj varijanti odaberimo da je za sljedeću tačku odabrana tačka M_9, stoga je: $\max\limits_{\bar{x^0} \in \Omega}\{\Delta f(x^0)\} = 12000$

Varijanta I.

<u>*2. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^1 = M_9 = \{0, 0, 40\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_9 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_9 = \{0, 0, 40\} \rightarrow M_8 = \{0, 26.66, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^1 = \{0, 26.66, 0\}$, stoga je $\Delta f_1^1 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 26.66 + 300 \cdot (0) = 5332$

II) $M_9 = \{0, 0, 40\} \rightarrow M_{10} = \{13.33, 0, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^1 = \{13.33, 0, 0\}$, stoga je $\Delta f_2^1 = 100 \cdot 13.33 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot (0) = 1333$

Iz navedena dva slučaja slijedi da je maksimalni prijelaz ostvaren u prvom slučaju odnosno za sljedeću tačku odabiremo tačku M_8, za ovaj prijelaz je $\underset{x^1 \in \Omega}{max}\{\Delta f(x^1)\} = 5332$

<u>*3. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^2 = M_8 = \{0, 26.66, 40\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_8 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_8 = \{0, 26.66, 40\} \rightarrow M_{10} = \{13.33, 0, 40\}$ međutim, ova tačka je u prethodnom koraku imala prirast koji je bio manji nego je to dala tačka M_8 tako da ovaj prijelaz nije potrebno razmatrati.

II) $M_8 = \{0, 26.66, 40\} \rightarrow M_7 = \{0, 60, 15\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^2 = \{0, 33.34, -25\}$, stoga je $\Delta f_2^2 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 33.34 + 300 \cdot (-25) = -832$

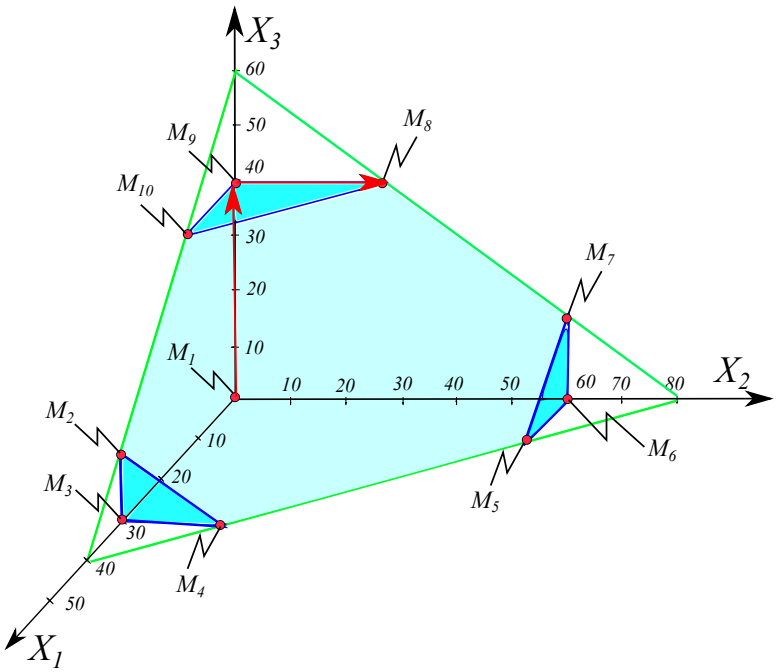
Budući da su priraštaji funkcije negativni i da u trećem koraku nema poboljšanja, očito je da je tačka optimuma:

$$x^* = M_8 = \{0, 26.66, 40\}$$

$$f^* = \sum \Delta f = \Delta f_1 = f(M_1) + \Delta f(x^0) + \Delta f(x^1) =$$

$$= 0 + 12000 + 5332 = 17332$$

Kretanje po rebrima dozvoljene oblasti pretraživanja ($M_1 \rightarrow M_9 \rightarrow M_8$) je ilustrirano slikom 4.11



Slika 4.11: Traženje optimuma metodom rebrenih varijacija slijedom $M_1 \to M_9 \to M_8$ za funkciju $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$.

Varijanta II.

<u>*2. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^1 = M_6 = \{0, 60, 0\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_6 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_6 = \{0, 60, 0\} \to M_5 = \{10, 60, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^1 = \{10, 0, 0\}$, stoga je $\Delta f_1^1 = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot (0) = 1000$

II) $M_6 = \{0, 60, 0\} \to M_7 = \{0, 60, 15\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^1 = \{0, 0, 15\}$, stoga je $\Delta f_2^1 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot (15) = 4500$

Iz navedena dva slučaja slijedi da je maksimalni prijelaz ostvaren u slučaju II odnosno za sljedeću tačku odabiremo tačku M_7, za ovaj prijelaz je $\underset{\bar{x^1} \in \Omega}{max}\{\Delta f(x^1)\} = 4500$

<u>*3. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^2 = M_7 = \{0, 60, 15\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_7 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_7 = \{0, 60, 15\} \to M_5 = \{10, 60, 0\}$ međutim, ova tačka je u prethodnom koraku imala prirast koji je bio manji nego je to dala tačka M_7 tako da ovaj prijelaz nije potrebno razmatrati.

II) $M_7 = \{0, 60, 15\} \rightarrow M_8 = \{0, 26.66, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^2 = \{0, -33.34, 25\}$, stoga je $\Delta f_2^2 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot (-33.34) + 300 \cdot (25) = 832$

Iz navedenih dva slučaja slijedi da je maksimalni prijelaz ostvaren slučaju II odnosno za sljedeću tačku odabiremo tačku M_8, za ovaj prijelaz je $\underset{\bar{x^2} \in \Omega}{max}\{\Delta f(x^2)\} = 832$

4. korak: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^3 = M_8 = \{0, 26.66, 40\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_8 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_8 = \{0, 26.66, 40\} \rightarrow M_9 = \{0, 0, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^3 = \{0, -26.66, 0\}$, stoga je $\Delta f_1^3 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot (-26.66) + 300 \cdot (0) = -5332$

II) $M_8 = \{0, 26.66, 40\} \rightarrow M_{10} = \{13.33, 0, 40\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^3 = \{13.33, -26.66, 0\}$, stoga je $\Delta f_2^3 = 100 \cdot (13.33) + 200 \cdot (-26.66) + 300 \cdot (0) = -3999$

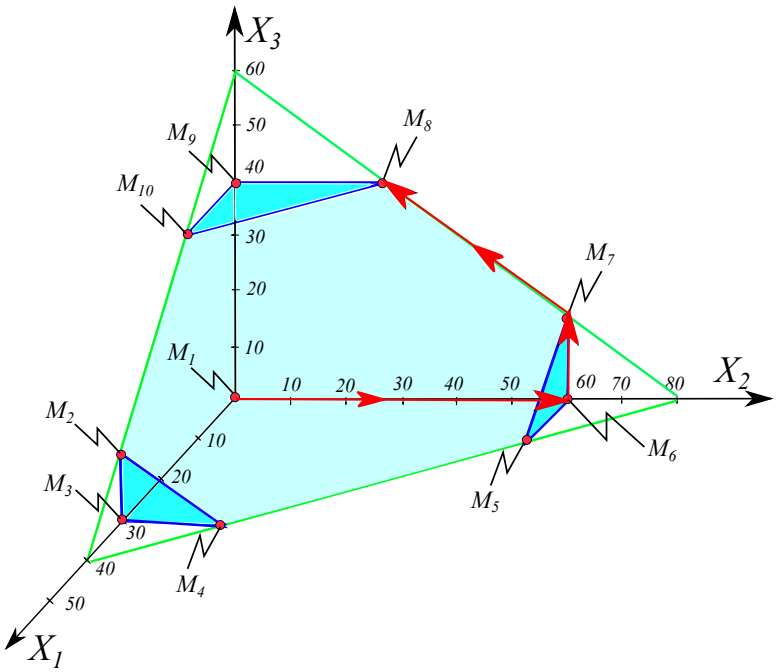
Budući da su priraštaji funkcije negativni i da u četvrtom koraku nema poboljšanja, očito je da je tačka optimuma:

$$x^* = M_8 = \{0, 26.66, 40\}$$

$$f^* = \sum \Delta f = f(M_1) + \Delta f(x^0) + \Delta f(x^1) + \Delta f(x^2) =$$

$$= 0 + 12000 + 4500 + 832 = 17332$$

Kretanje po rebrima dozvoljene oblasti pretraživanja ($M_1 \rightarrow M_6 \rightarrow M_7 \rightarrow M_8$) je ilustrirano slikom 4.12.



Slika 4.12: Traženje optimuma metodom rebrenih varijacija slijedom $M_1 \to M_6 \to M_7 \to M_8$ za funkciju $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$.

Zadatak 30.

Ako je zadana sljedeća funkcija cilja: $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$, i ako je oblast mogućih rješenja ograničena sa:

$$\Omega : \begin{cases} 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 80, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 50, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Naći maksimum ovako definisanog problema:

a) metodom pretraživanja vršnih tačaka

b) metodom rebrenih varijacija

Rješenje zadatka 30:

a) Metoda pretraživanja vršnih tačaka

Grafičkim predstavljanjem pravih u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu x_1, x_2, x_3 koje reprezentuju ograničenja u vidu jednačina se nalazi oblast mogućih rješenja D (slika 4.13).

Budući da je trodimenzionalni prostor, u nastavku će se dataljno objasniti način crtanja ograničenja.

Prvo ograničenje u vidu jednačina predstavlja ravan

$$P_1 : 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 = 80.$$

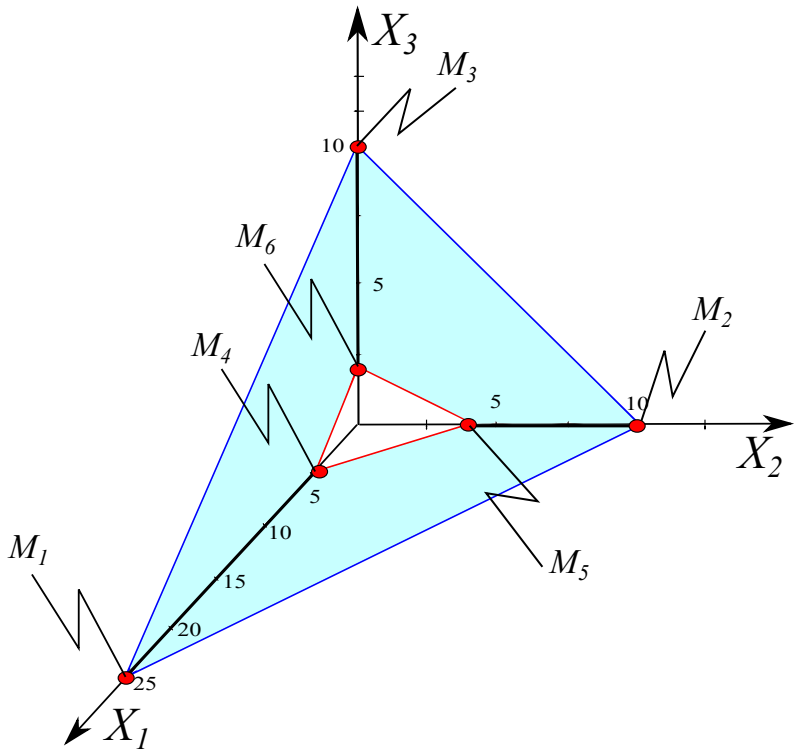
- Za $x_2 = x_3 = 0$, slijedi $x_1 = \frac{80}{20} = 4$, tj. $A_1 = (4, 0, 0)$,
- Za $x_1 = x_3 = 0$, slijedi $x_2 = \frac{80}{20} = 4$, tj. $B_1 = (0, 4, 0)$,
- Za $x_1 = x_2 = 0$, slijedi $x_3 = \frac{80}{40} = 2$, tj. $C_1 = (0, 0, 2)$.

Drugo ograničenje izraženo jednačinom predstavlja ravan

$$P_2 : 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 50$$

- Za $x_2 = x_3 = 0$, slijedi $x_1 = \frac{50}{2} = 25$, tj. $A_2 = (25, 0, 0)$,
- Za $x_1 = x_3 = 0$, slijedi $x_2 = \frac{50}{5} = 10$, tj. $B_2 = (0, 10, 0)$,
- Za $x_1 = x_2 = 0$, slijedi $x_3 = \frac{50}{5} = 10$, tj. $C_2 = (0, 0, 10)$.

Važno je napomenuti da tačke A sa odgovarajućim indeksima predstavljaju presjeke ravni sa koordinatnom osom x_1, tačke B sa koordinatnom osom x_2 i tačke C sa koordinatnom osom x_3. Poliedar dozvoljenih rješenja je prikazan na slici 4.13.



Slika 4.13: Traženje optimuma metodom pretraživanja vršnih tačaka za funkciju $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$.

Koordinate vršnih tačaka su: $M_1(25, 0, 0)$, $M_2(0, 10, 0)$,$M_3(0, 0, 10)$, $M_4(4, 0, 0)$, $M_5(0, 4, 0)$, $M_6(0, 0, 2)$.

Vrijednosti funkcije cilja $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$ u vršnim tačkama su:

$$f(M_1) = 100 \cdot 25 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 2500$$
$$f(M_2) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 10 + 300 \cdot 0 = 2000$$
$$f(M_3) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$$
$$f(M_4) = 100 \cdot 4 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 400$$
$$f(M_5) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 4 + 300 \cdot 0 = 800$$
$$f(M_6) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 2 = 600$$

Vidi se da je maksimum funkcije u tački $M_3(0, 0, 10)$ i iznosi 3000.

b) Metoda rebrenih varijacija

<u>*1. korak*</u>: za početnu tačku će se uzeti $x^0 = M_1 = \{25, 0, 0\} \Rightarrow f(M_1) = 100 \cdot 25 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 2500 + 0 + 0 = 2500$. Moguća su tri smjera kretanja iz početne tačke M_1, a to su:

I) $M_1 = \{25, 0, 0\} \rightarrow M_3 = \{0, 0, 10\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^0 = \{-25, 0, 10\}$, stoga je $\Delta f_1^0 = 100 \cdot (-25) + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 500$

II) $M_1 = \{25, 0, 0\} \rightarrow M_2 = \{0, 10, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^0 = \{-25, 10, 0\}$, stoga je $\Delta f_2^0 = 100 \cdot (-25) + 200 \cdot 10 + 300 \cdot 0 = -500$

III) $M_1 = \{25, 0, 0\} \rightarrow M_4 = \{4, 0, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_3^0 = \{-21, 0, 0\}$, stoga je $\Delta f_3^0 = 100 \cdot (-21) + 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = -2100$

Za sva tri slučaja slijedi da je maksimalni prijelaz ostvaren u slučaju I), stoga je: $\underset{x^0 \in \Omega}{max}\{\Delta f(x^0)\} = 500$

<u>*2. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^1 = M_3 = \{0, 0, 10\}$. Moguća su dva smjera kretanja iz tačke M_3 (ne vraćajući se nazad), a to su:

I) $M_3 = \{0, 0, 10\} \rightarrow M_2 = \{0, 10, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^1 = \{0, 10, -10\}$, stoga je $\Delta f_1^1 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 10 + 300 \cdot (-10) = -1000$

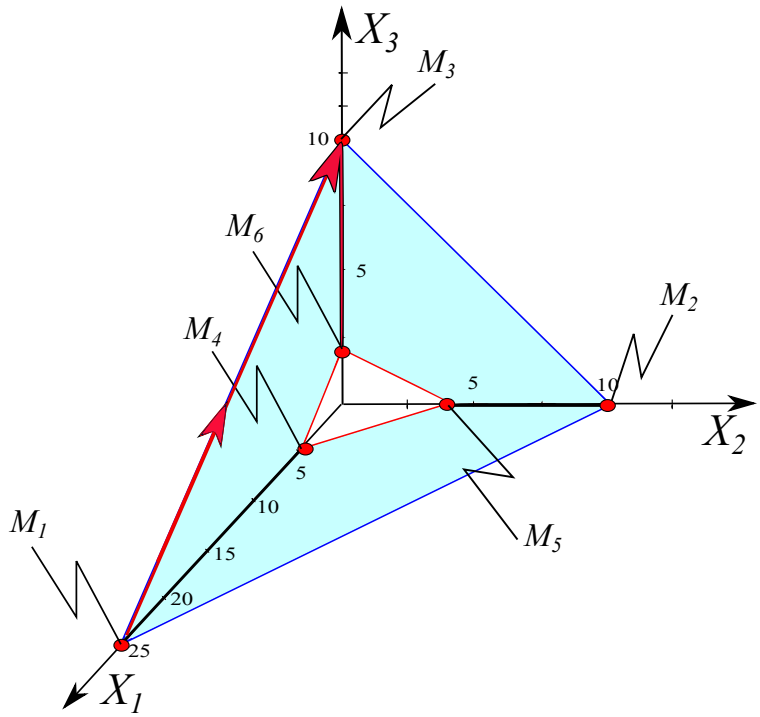
II) $M_3 = \{0, 0, 10\} \rightarrow M_6 = \{0, 0, 2\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_2^1 = \{0, 0, -8\}$, stoga je $\Delta f_2^1 = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 300 \cdot (-8) = -2400$

Budući da su priraštaji funkcije negativni i da u drugom koraku nema poboljšanja, očito je da je tačka optimuma:

$$x^* = M_3 = \{0, 0, 10\}$$

$$f^* = \sum \Delta f = f(M_1) + \Delta f(x^0) = 2500 + 500 = 3000$$

Kretanje po rebrima dozvoljene oblasti pretraživanja je ilustrirano slikom 4.14.



Slika 4.14: Traženje optimuma metodom rebrenih varijacija ($M_1 \to M_3$) za funkciju $f(x) = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$.

Može se zaključiti da je za trodimenzionalne probleme grafička metoda moguća, ali je relativno neefikasna i komplikovana. Mnogo je jednostavnija primjena nekih drugih metoda, poput simpleksa. Prema tome, grafičku metodu ne treba primjenjivati kada je broj promjenljivih veći od dva ($n > 2$).

4.4 Primjena simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja

Kao što je razmatrano u prethodnim poglavljima, problem LP u opštem obliku se definiše na sljedeći način:

$$\min \text{ ili } \max \quad f(x) = C^T x \tag{4.24}$$

uz ograničenja:

$$\Omega : \begin{cases} Ax & \leq b, \\ x_i & \geq 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Neka se radi o problemu maksimizacije funkcije dvije promjenljive, odnosno, potrebno je naći:

$$\max f(x) = C^T x = C_1 x_1 + C_2 x_2 \tag{4.26}$$

uz ograničenja:

$$\Omega : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ x_i \geq 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Da bi se dati problem linearnog programiranja mogao riješiti, postojeći sistem nejednačina se uvođenjem slack varijabli prevodi u sljedeći sistem jednačina:

$$\Omega : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 = b_3, \\ x_i \geq 0, \end{cases} \tag{4.28}$$

gdje su x_3, x_4, x_5 slack varijable.

Dakle, u novoformiranom sistemu jednačina postoje dvije nepoznate x_1, x_2 koje su zapravo i nepoznate osnovnog problema linearnog programiranja (ovaj broj nepoznatih osnovnog problema se pridružuje varijabli n, dakle u ovom slučaju je $n = 2$).

Pored nepoznatih osnovnog problema u jednačinama egzistiraju i tri slack varijable x_3, x_4, x_5 koje predstavljaju broj slack varijabli koje su dodane u sistem da bi se nejednačine prevele u jednačine (ovaj broj slack varijabli se pridružuje varijabli m, dakle u ovom slučaju je $m = 3$).

Na ovaj način broj jednačina proširenog sistema postaje $n + m = 5$. Tako se od početne dvije promjenljive pređe na pet promjenljivih. Ove promjenljive

uključuju se u funkciju cilja tako da ne utječu na rješenje. Ovo se može riješiti tako da funkcija cilja proširenog sistema postaje:

$$P = C_1x_1 + C_2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \tag{4.29}$$

Iz proširene funkcije cilja i sistema jednačina formira se početna simpleks tabela problema linearnog programiranja, pri čemu je:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrica A, X, b i C formira se početna simpleks tabela 4.1, pri čemu se u početnoj simpleks tabeli polazi od nebaznih varijabli x_3, x_4, x_5.

Tabela 4.1: Početna simpleks tabela

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	C_3	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	σ_1	θ_1
x_4	C_4	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	σ_2	θ_2
x_5	C_5	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	σ_3	θ_3
$P(x)$		S_j							
		$C_j - S_j$							

U početnoj simpleks tabeli nepoznati elementi se formiraju na sljedeći način:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot b_i \tag{4.30}$$

gdje je i indeks pripadajućeg reda, te:

$$S_j = \sum_{i=1}^{m+n} C_i a_{ij} \tag{4.31}$$

i

$$\sigma_i = b_i + \sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} \tag{4.32}$$

Na ovaj način dobija se potpuno popunjena početna simpleks tabela 4.2.

Tabela 4.2: Popunjena početna simpleks tabela

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	C_3	b_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	σ_1	θ_1
x_4	C_4	b_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	σ_2	θ_2
x_5	C_5	b_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	σ_3	θ_3
$P(x)$		S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	C_1	C_2	0	0	0		

Može se vidjeti da se u formiranju početne simpleks tabele polazi od nebaznih varijabli (slack promjenljive x_3, x_4, x_5) koje su u funkciji cilja pomnožene sa odgovarajućim cijenama C_i (koje su u ovom slučaju jednake nuli). Početna vrijednost funkcije cilja je stoga nula ($P(x) = 0$). Kasnijim formiranjem narednih tabela nebazne varijable se smjenjuju sa baznim, iterativno dovodeći do optimalnog rješenja.

Sljedeći korak u radu sa simpleks tabelama je posmatranje reda $C_j - S_j$ i u kojem se pronalazi maksimalan pozitivan element (recimo da je to u ovom slučaju C_2). Ovaj element je bitan jer on određuje tzv. vodeću kolonu. U ovom slučaju cijela kolona kojoj pripada element C_2 postaje vodeća, tabela 4.3.

Tabela 4.3: Određivanje vodeće kolone simpleks tabele

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	C_3	b_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	σ_1	θ_1
x_4	C_4	b_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	σ_2	θ_2
x_5	C_5	b_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	σ_3	θ_3
$P(x)$		S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	C_1	C_2	0	0	0		

Sada se može izvršiti formiranje vrijednosti elementa kolone θ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), kako je prikazano u tabeli 4.4.

Tabela 4.4: Određivanje vrijednosti θ_i

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	C_3	b_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	σ_1	b_1/a_{12}
x_4	C_4	b_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	σ_2	b_2/a_{22}
x_5	C_5	b_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	σ_3	b_3/a_{32}
$P(x)$		S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	C_1	C_2	0	0	0		

Posmatra se minimalan pozitivan θ_i (neka je to u ovom slučaju bio b_1/a_{12}, vrijednosti su prikazane u tabeli 4.5). Red u kojem se nalazi taj θ_i postaje vodeći red, a presjek vodeće kolone i vodećeg reda daje vodeći element (u ovom slučaju a_{12}) koji je bitan za formiranje naredne simpleks tabele.

Tabela 4.5: Određivanje vodećeg reda i vodećeg elementa

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	C_3	b_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	σ_1	b_1/a_{12}
x_4	C_4	b_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	σ_2	b_2/a_{22}
x_5	C_5	b_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	σ_3	b_3/a_{32}
$P(x)$		S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	C_1	C_2	0	0	0		

Indeks vodeće kolone pokazuje koja od baznih varijabli ulazi u razmatranje (u ovom slučaju je to element kolone a_2), a indeks vodećeg reda pokazuje koja od nebaznih varijabli se isključuje iz razmatranja (u ovom slučaju je to promjenljiva x_3). Naredna simpleks tabela se formira na sljedeći način: svi elementi reda u kojem se nalazi vodeći element se dijele sa vrijednošću vodećeg elementa (a_{12}), pri čemu se dobija prva iteracija nakon početne simpleks tabele (prikazano u tabeli 4.6).

Tabela 4.6: Simpleks tabela – prva iteracija

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	C_2	$\frac{b_1}{a_{12}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}}$	1	$\frac{1}{a_{12}}$	0	0	$\frac{\sigma_1}{a_{12}}$	
x_4	0	b_2							
x_5	0	b_3							
$P(x)$		S_j							
		$C_j - S_j$							

Za ostale redove način formiranja novih elemenata $a_{ij}^{(k+1)}$ (gdje $k+1$ predstavlja simpleks tabelu za koju formiramo nove članove) zavisi od odgovarajućih članova prethodne tabele ($a_{ij}^{(k)}$, $a_{iq}^{(k)}$) i odgovarajućeg člana trenutne tabele $a_{rj}^{(k+1)}$ (koji se dobio dijeljenjem pripadajućeg člana $a_{rj}^{(k)}$ sa vodećim elementom). U navedenim formulama q predstavlja indeks vodeće kolone (prethodne tabele), a r indeks vodećeg reda (prethodne tabele). Odnosno, sve rečeno se može zapisati kao:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{iq}^{(k)} \cdot a_{rj}^{(k+1)}. \tag{4.33}$$

Kao primjer rečenog, pogledati kako se formiraju članovi drugog i trećeg reda nove simpleks tabele (prikazano u tabeli 4.7).

Za formiranje članova drugog reda nove simpleks tabele vidi se da je element množenja $a_{iq}^{(k)} = a_{22}$, a za članove trećeg reda element množenja je $a_{iq}^{(k)} = a_{32}$.

Prema tome, popunjena simpleks tabela prve iteracije je prikazana u tabeli 4.7.

Ponovo se izračunavaju $P(x)$, S_j, $C_j - S_j$. Iz reda $C_j - S_j$ određuje se maksimalan pozitivan element, čime njegova kolona postaje vodeća.

Dalje bi se izvršilo dijeljenje b_i sa pripadajućim elementima vodeće kolone, te bi se dobile vrijednosti $\frac{b_i}{a_{ij}}$, pa bi se od njih odredio minimalan pozitivan element (θ_i). Red u kojem se on nalazi postaje vodeći, a presjek vodeće kolone i vodećeg reda određuje novi vodeći element.

Ostatak procedure je analogan i ponavlja se sve do simpleks tabele koja u koloni $C_j - S_j$ više ne sadrži niti jedan pozitivan element. Nepostojanje niti jednog pozitivnog elementa indicira da je dostignuto optimalno rješenje, a vrijednost optimuma se čita iz reda za b_i.

Tabela 4.7: Formiranje drugog i trećeg reda simpleks tabele – prva iteracija

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	C_2	$\frac{b_1}{a_{12}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}}$	1	$\frac{1}{a_{12}}$	0	0	$\frac{\sigma_1}{a_{12}}$	
x_4	0	$b_2 - a_{22} \cdot \frac{b_1}{a_{12}}$	$a_{21} - a_{22} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$	$a_{22} - a_{22} \cdot 1$	$0 - a_{22} \cdot \frac{1}{a_{12}}$	$1 - a_{22} \cdot 0$	$0 - a_{22} \cdot 0$		
x_5	0	$b_3 - a_{32} \cdot \frac{b_1}{a_{12}}$	$a_{31} - a_{32} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$	$a_{32} - a_{32} \cdot 1$	$0 - a_{32} \cdot \frac{1}{a_{12}}$	$0 - a_{32} \cdot 0$	$1 - a_{32} \cdot 0$		
$P(x)$		S_j							
		$C_j - S_j$							

Zadatak 31.

Data je funkcija cilja

$$P(x) = 2x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Odrediti maksimum ove funkcije primjenom simpleksnog algoritma.

Rješenje zadatka 31:

Da bi se ograničenja svela na tip jednakosti, uvede se tri slack varijable $x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Time sistem postaje:

$$\begin{aligned} x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 &= 24, \\ 3 \cdot x_1 + x_2 + x_4 &= 21, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 9. \end{aligned}$$

Dati sistem predstavljen u matričnoj formi izgleda ovako:

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Prvo se formira početna simpleks tabela 4.8.

Tabela 4.8: Početna simpleks tabela - zadatak 31.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	0	24	1	4	1	0	0	30	6
x_4	0	21	3	1	0	1	0	26	21
x_5	0	9	1	1	0	0	1	12	9
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	2	5	0	0	0		

Nakon popunjavanja tabele matricama A, b, C vidi se da je maksimalna pozitivna vrijednost reda $(C_j - S_j)_{\max} = 5$ i kolona tabele u kojoj se nalazi ova vrijednost definiše vodeću kolonu. Vrijednosti θ_i dobijaju se dijeljenjem elemenata kolone b_i i vodeće kolone, te se potom izabere minimalna pozitivna vrijednost θ, čiji red postaje vodeći. Presjek elemenata vodećeg reda i kolone definiše vodeći element, čime iz baze izlazi nebazna varijabla x_3, a ulazi bazna varijabla x_2, što formira simpleks tabelu prve iteracije, tabela 4.9.

Tabela 4.9: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 31.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	5	6	0.25	1	0.25	0	0	7.5	24
x_4	0	15	2.75	0	-0.25	1	0	18.5	5.45
x_5	0	3	0.75	0	-0.25	0	1	4.5	4
$P(x)$	30	S_j	1.25	5	1.25	0	0		
		$C_j - S_j$	0.75	0	-1.25	0	0		

Iz tabele 4.9 se vidi da je maksimalan pozitivan element u koloni $C_j - S_j = 0.75$, što ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna promjenljiva x_1. Minimalan pozitivan element u redu θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva x_5. Iz tabele 4.9 se također može uočiti da je sada vodeći element $a_{31} = 0.75$. Također, iz datih razmatranja vidi se da je element množenja za elemente prvog reda $a_{11} = 0.25$, a za elemente drugog reda $a_{21} = 2.75$. Forimira se nova simpleks tabela 4.10.

Tabela 4.10: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 31.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	5	5	0	1	0.33	0	-0.33	6	
x_4	0	4	0	0	0.67	1	-3.67	2	
x_1	2	4	1	0	-0.33	0	1.33	6	
$P(x)$	33	S_j	2	5	1	0	1		
		$C_j - S_j$	0	0	-1	0	-1		

Budući da nema niti jedne pozitivne vrijednosti u redu $C_j - S_j$ tabele 4.10, dostignut je optimum. Očitanjem iz tabele 4.10 se vidi da se nalazi u tački: $x_1 = 4,\ x_2 = 5$, a vrijednost funkcije je $P^* = P(4, 5) = 33$.

Zadatak 32.

Zadan je skup Ω sistemom nejednakosti:

$$\Omega : \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_i \geq 0, \end{cases}$$

Primjenom simpleksne metode odrediti maksimum funkcije

$$P(x) = 2x_1 + x_2.$$

Rješenje zadatka 32:

Uvođenjem slack varijabli $x_3, x_4, x_5 \geq 0$, sistem jednakosti je:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Dati sistem predstavljen u matričnoj formi izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Formira se početna simpleks tabela 4.11.

Tabela 4.11: Početna simpleks tabela - zadatak 32.

x_i	C_i	C_j / b_i	C_1 / a_1	C_2 / a_2	C_3 / a_3	C_4 / a_4	C_5 / a_5	Provj.	θ
x_3	0	1	-1	1	1	0	0	2	-1
x_4	0	4	1	1	0	1	0	7	4
x_5	0	3	1	0	0	0	1	5	3
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	2	1	0	0	0		

Iz početne simpleks tabele 4.11 se vidi da je maksimalan pozitivan element u koloni $C_j - S_j = 2$, što ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna

promjenljiva x_1. Minimalan pozitivan element u redu θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva x_5. Iz tabele 4.11 se također može uočiti da je sada vodeći element $a_{31} = 1$. Također, iz datih razmatranja vidi se da je element množenja za elemente prvog reda $a_{11} = -1$, a za elemente drugog reda $a_{21} = 1$. Formira se nova simpleks tabela 4.12.

Tabela 4.12: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 32.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	0	4	0	1	1	0	1	7	4
x_4	0	1	0	1	0	1	-1	2	1
x_1	2	3	1	0	0	0	1	5	∞
$P(x)$	6	S_j	2	0	0	0	2		
		$C_j - S_j$	0	1	0	0	-2		

Pošto u redu $C_j - S_j$ postoji pozitivna vrijednost, optimum nije dostignut, te se nastavlja postupak. Umjesto promjenljive x_4, u razmatranje ulazi x_2 i formira se naredna simpleks tabela 4.13.

Tabela 4.13: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 32.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	0	3	0	0	1	-1	2	5	
x_2	1	1	0	1	0	1	-1	2	
x_1	2	3	1	0	0	0	1	5	
$P(x)$	7	S_j	2	1	0	1	1		
		$C_j - S_j$	0	0	0	-1	-1		

Budući da ne postoji niti jedna pozitivna vrijednost u redu $C_j - S_j$ tabele 4.13, optimum je dostignut. Očitanjem iz tabele 4.13 slijedi da je optimum u tački:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1,$$

odnosno:

$$P^* = P(3, 1) = 7,$$

4.4.1 Problem degeneracije vršne tačke

U određenim zadacima linearnog programiranja može se desiti da ograničenja formiraju vršne tačke koje su višestruke, odnosno koje predstavljaju rješenje ukrštanja više graničnih uslova istovremeno. U takvim situacijama često se javlja da u redu θ postoje dvije ili više vrijednosti koje su identične. Budući da su svi ovi odabiri podjednako dozvoljeni, može se dogoditi da izbor vodećeg reda ili vodećeg elementa dovede do rješenja koje zapravo ne pripada dozvoljenoj oblasti. Kao ilustraciju ovog problema, u nastavku je prikazan odgovarajući zadatak.

Zadatak 33.

Riješiti problem linearnog programiranja ako je funkcija cilja data kao:

$$\max P(x) = x_1 + 1.5x_2 + 2x_3,$$

i ako je dozvoljena oblast rješenja zadata kao:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Rješenje zadatka 33:

Dati sistem nejednačina se prevodi, pomoću slack varijabli, u sistem jednačina:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 10, \\ x_i \geq 0. \end{gathered}$$

Funkcija cilja sada ima oblik:

$$P(x) = x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5.$$

Iz dobivene proširene funkcije cilja i sistema jednakosti odgovarajuće matrice su:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

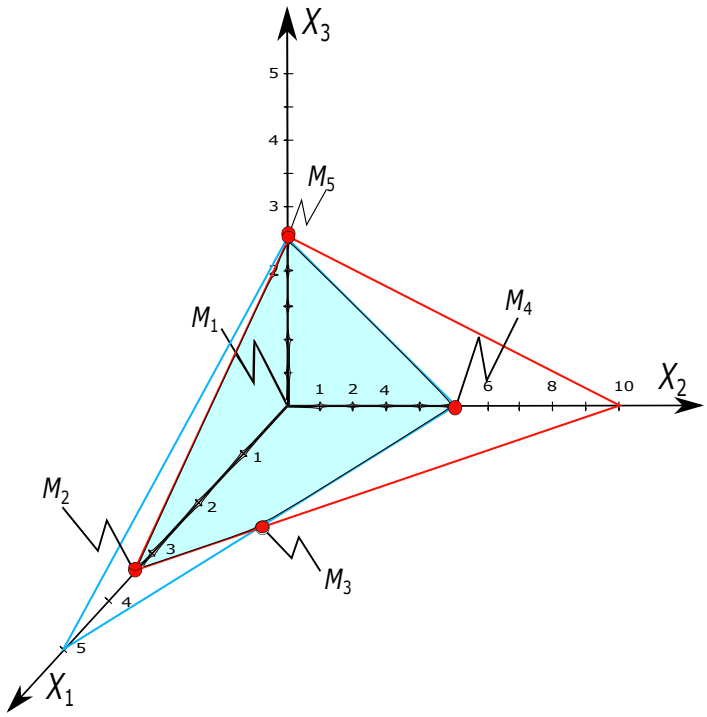
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formira se početna simpleks tabela 4.14.

Tabela 4.14: Početna simpleks tabela - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	5	1	1	2	1	0	10	2.5
x_5	0	10	3	1	4	0	1	19	2.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	1	1.5	2	0	0		

U ovom slučaju imaju dvije potpuno identične vrijednosti u redu θ, od toga koju od ove dvije vrijednosti se odaberu može ovisiti rješenje. Kao ilustraciju, pogledati oblast prikazanu na slici 4.15



Slika 4.15: Prikaz oblasti pretraživanja za $f(x) = x_1 + 1.5x_2 + 2x_3$.

Vidi se da sve vršne tačke, izuzev tačke M_5, nalaze u presjeku tri ravni u $\mathbb{E}^3$, dok je M_5 u presjeku četiri ravni. U daljnjoj analizi razmotrit će se dva slučaja, koja ilustriraju različite mogućnosti izbora vodeće kolone i redova u simpleks algoritmu.

1. Slučaj

Iz početne simpleks tabele odaberi se druga kolona kao vodeća. U tom slučaju se dobije simpleks tabela 4.15.

Tabela 4.15: Simpleks tabela – prva iteracija (1. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	5	1	1	2	1	0	10	2.5
x_5	0	10	3	1	4	0	1	19	2.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	1	1.5	2	0	0		

Ovakvim odabirom, vodeći element je $a_{23} = 4$. Element množenja za elemente prvog reda iznosi $a_{13} = 2$. Nebazna varijabla x_5 izlazi iz tabele, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_3. Formira se sljedeća simpleks tabela 4.16.

Tabela 4.16: Simpleks tabela – druga iteracija (1. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	0	-0.5	0.5	0	1	-0.5	0.5	0
x_5	2	2.5	0.75	0.25	1	0	0.25	4.75	10
$P(x)$	5	S_j	1.5	0.5	2	0	0.5		
		$C_j - S_j$	-0.5	1	0	0	-0.5		

Vodeći element za drugu simpleks tabelu 4.16 je $a_{22} = 0.25$. Element množenja za elemente prvog reda je $a_{12} = 0.5$. Stoga, iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_5, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_2.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.17.

Tabela 4.17: Simpleks tabela – treća iteracija (1. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	-5	-2	0	-2	1	-1	-9	
x_2	1.5	10	3	1	4	0	1	19	
$P(x)$	15	S_j	4.5	1.5	6	0	1.5		
		$C_j - S_j$	-3.5	0	-4	0	-1.5		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.17 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Očitanjem iz simpleks tabele 4.17 vidi se da je:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 0, \quad P(x^*) = 15.$$

Međutim, ako se pogleda oblast pretraživanja i tačka optimuma x^* (vidjeti sliku 4.15), vidi se da tačka optimuma ne pripada oblasti pretraživanja, odnosno da je optimalno rješenje pogrešno. Pogrešna tačka optimuma je posljedica degeneracije vršne tačke i pogrešnog odabira iz početne simpleks tabele.

U nastavku će se ispitati drugi slučaj.

2. Slučaj

U drugom slučaju kao vodeći se odabire prvi red početne simpleks tabele, što vodi formiranju sljedeće simpleks tabele 4.18.

Tabela 4.18: Simpleks tabela – prva iteracija (2. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	5	1	1	2	1	0	10	2.5
x_5	0	10	3	1	4	0	1	19	2.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	1	1.5	2	0	0		

Ovakvim odabirom, vodeći element je $a_{13} = 2$. Element množenja za elemente drugog reda je $a_{23} = 4$. Stoga, iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_4, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_3.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.19.

Tabela 4.19: Simpleks tabela – druga iteracija (2. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	2	2.5	0.5	0.5	1	0.5	0	5	5
x_5	0	0	1	-1	0	-2	1	-1	0
$P(x)$	5	S_j	1	1	2	1	0		
		$C_j - S_j$	0	0.5	0	-1	0		

Vodeći element za drugu simpleks tabelu je $a_{12} = 0.5$, element množenja za elemente drugog reda je $a_{22} = -1$. Stoga, iz razmatranja izlazi bazna varijabla x_3, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_2.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.20.

Tabela 4.20: Simpleks tabela – treća iteracija (2. slučaj) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	1.5	5	1	1	2	1	0	10	
x_5	0	5	2	0	2	-1	1	9	
$P(x)$	7.5	S_j	1.5	1.5	3	5	0		
		$C_j - S_j$	-0.5	0	-1	-1.5	0		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.20 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Očitanjem iz simpleks tabele 4.20 vidi se da je:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0 \quad \text{i} \quad P(x^*) = 7.5,$$

odnosno:

$$P^* = P(x^*) = 7.5, \quad x^* = (0, 5, 0).$$

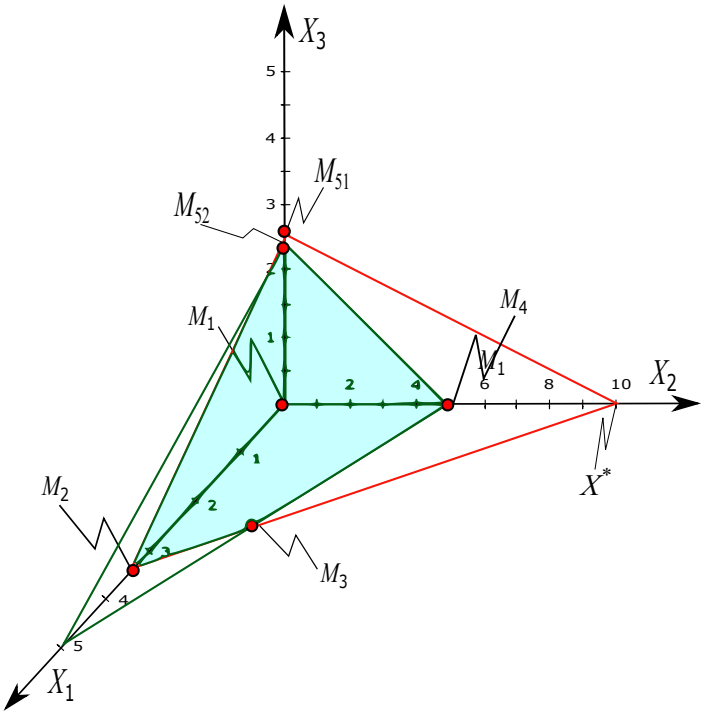
Tačka optimuma pripada oblasti pretraživanja.

Napomena: Da je bilo više ograničenja i da je višestrukost tačke veća od dva, tada ovakav pristup nema smisla. Da bi se izbjegle ovakve situacije degeneracije vršne tačke, potrebno je uvesti određena razmatranja u sistem tako da se izvrši razdvajanje vršnih tačaka na način da ne postoji višestrukost.

U nastavku će biti predstavljene dvije varijante koje se koriste za izbjegavanje degeneracije vršne tačke, čime se osigurava ispravan tok simpleks algoritma i sprječava nastajanje višestrukih optimalnih rješenja.

Varijanta I.

Da bi se izbjegao slučaj degeneracije vršne tačke, permutirat će se jedan od elemenata vektora b (recimo prvi), za neku beskonačno malo pozitivnu veličinu ($\varepsilon \geq 0$), tako da će sada prvi element zapravo biti $5 - \varepsilon$. Ako se to predstavi na crtežu, vidi se da će se time vršna tačka M_5 razdijeliti na dvije beskonačno bliske vršne tačke M_{51} i M_{52}.



Slika 4.16: Prikaz oblasti pretraživanja za $f(x) = x_1 + 1.5x_2 + 2x_3$ sa razdvojenim tačkama M_{51} i M_{52} .

Time se početna simpleks tabela modificira na oblik tabele 4.21.

Tabela 4.21: Početna simpleks tabela (Varijanta I) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	$5 - \varepsilon$	1	1	2	1	0	$10 - \varepsilon$	$2.5 - 0.5 \cdot \varepsilon$
x_5	0	10	3	1	4	0	1	19	2.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	1	1.5	2	0	0		

Iz prve simpleks tabele 4.21 se zaključuje da je vodeći element $a_{13} = 2$. Element množenja za elemente drugog reda je $a_{23} = 4$. Također se vidi da iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_4, a da ulazi bazna varijabla x_3.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.22.

Tabela 4.22: Simpleks tabela – prva iteracija (Varijanta I) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_3	2	$\frac{5-\varepsilon}{2}$	0.5	0.5	1	0.5	0	$\frac{10-\varepsilon}{2}$	$5-\varepsilon$
x_5	0	$2\cdot\varepsilon$	1	-1	0	-2	1	$-1+2\cdot\varepsilon$	$-2\cdot\varepsilon$
$P(x)$	$5-\varepsilon$	S_j	1	1	2	1	0		
		$C_j - S_j$	0	0.5	0	-1	0		

Iz druge simpleks tabele 4.22 se zaključuje da je vodeći element $a_{12} = 0.5$. Element množenja za elemente drugog reda je $a_{22} = -1$. Iz razmatranja izlazi bazna varijabla x_3, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_2. Formira se sljedeća tabela 4.23.

Tabela 4.23: Simpleks tabela – druga iteracija (Varijanta I) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	1.5	$5-\varepsilon$	1	1	2	1	0	$10-\varepsilon$	
x_5	0	$5+\varepsilon$	2	0	2	-1	1	$9+\varepsilon$	
$P(x)$	$7.5-1.5\cdot\varepsilon$	S_j	1.5	1.5	3	1.5	0		
		$C_j - S_j$	-0.5	0	-1	-1.5	0		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.23 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Neka se dopusti da je $\varepsilon \to 0$ i očitanjem iz simpleks tabele rješenje problema je:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad \text{i} \quad P(x^*) = 7.5,$$

odnosno:

$$x^* = (0, 5, 0), \quad P^* = 7.5.$$

Varijanta II.

Bez gubitka općenitosti može se permutirati jedan od elemenata vektora b (prvi), za neku beskonačno malu pozitivnu veličinu ($\varepsilon \geq 0$), u pozitivnu stranu, tako da sada ovaj element zapravo bude $5+\varepsilon$. Ovime se također vršna tačka M_5 dijeli na dvije beskonačno bliske vršne tačke M_{51} i M_{52}.

Time se početna simpleks tabela modificira na oblik tabele 4.26.

Tabela 4.24: Početna simpleks tabela (Varijanta II) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	$5+\varepsilon$	1	1	2	1	0	$10+\varepsilon$	$2.5+0.5\cdot\varepsilon$
x_5	0	10	3	1	4	0	1	19	2.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	1	1.5	2	0	0		

Iz prve simpleks tabele 4.26 se zaključuje da je vodeći element $a_{23} = 4$, a element množenja za elemente prvog reda je $a_{13} = 2$. Također se vidi da iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_5, a da ulazi bazna varijabla x_3.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.25.

Tabela 4.25: Simpleks tabela – prva iteracija (Varijanta II) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_4	0	ε	-0.5	0.5	0	1	-0.5	$0.5+\varepsilon$	$2\cdot\varepsilon$
x_3	2	2.5	0.75	0.25	1	0	0.25	4.75	10
$P(x)$	5	S_j	1.5	0.5	2	0	0.5		
		$C_j - S_j$	-0.5	1	0	0	-0.5		

Iz druge simpleks tabele 4.25 zaključuje se da je vodeći element $a_{12} = 0.5$, a element množenja za elemente drugog reda je $a_{22} = 0.25$. Iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_4, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_2.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.26.

Tabela 4.26: Simpleks tabela – druga iteracija (Varijanta II) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	1.5	$2 \cdot \varepsilon$	-1	1	0	2	-1	$1 + 2 \cdot \varepsilon$	$-2 \cdot \varepsilon$
x_3	2	$2.5 - 0.5 \cdot \varepsilon$	1	0	1	-0.5	0.5	$4.5 - 0.5 \cdot \varepsilon$	$5 - 0.25 \cdot \varepsilon$
$P(x)$	$5 + 2 \cdot \varepsilon$	S_j	0.5	1.5	2	2	-0.5		
		$C_j - S_j$	0.5	0	0	-2	0.5		

U trećoj simpleks tabeli 4.26 primjećuje se postojanje dva ista elementa u koloni $C_j - S_j = 0.5$. Međutim, odabirom bilo kojeg se ne pravi greška, odnosno dobit će se optimalno rješenje. Za ovaj slučaj npr. odredi se peti red.

Ovakvim odabirom vodeći element je $a_{25} = 0.5$, a element množenja za elemente prvog reda je $a_{15} = -1$. Iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_3, a na njeno mjesto ulazi nebazna varijabla x_5.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.27.

Tabela 4.27: Simpleks tabela – treća iteracija (Varijanta II) - zadatak 33.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
x_2	1.5	$5 + \varepsilon$	1	1	2	1	0	$10 + \varepsilon$	
x_5	0	$5 - \varepsilon$	2	0	2	-1	1	$9 - \varepsilon$	
$P(x)$	7.5	S_j	1.5	1.5	3	1.5	0		
		$C_j - S_j$	-0.5	0	-1	-1.5	0		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.27 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum.

Neka $\varepsilon \to 0$, rješenje iz simpleks tabele 4.27 je:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad \text{i} \quad P(0, 5, 0) = 7.5,$$

odnosno:

$$x^* = (0, 5, 0), \quad P^*(0, 5, 0) = 7.5.$$

4.4.2 Drugi tipovi degeneracije vršne tačke i metoda velikog M

Prilikom rješavanja problema linearnog programiranja mogu se javiti određene nepravilnosti u početnoj vršnoj tački, koje zahtijevaju posebnu obradu. Ove situacije se javljaju najčešće u dva slučaja:

1. Ukoliko se desi da bilo koja komponenta vektora b ima vrijednost jednaku nuli, tada se radi o degeneraciji početne vršne tačke. U ovakvom slučaju sve komponente vektora b se mijenjaju sa:

$$k \cdot \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon > 0, \ \varepsilon \to 0 \text{ i } k \cdot \varepsilon \ll 1, \tag{4.34}$$

   čime se izbjegava višestrukost vršne tačke i osigurava pravilno izvođenje simpleks algoritma.

2. Ukoliko se desi da je neka od komponenti vektora $b < 0$, i ako se prilikom prevođenja sistema nejednakosti u sistem jednačina pojavi varijabla X (slack) sa negativnim predznakom, odmah joj se dodaje jedna vještačka varijabla X sa pozitivnim predznakom. U ovakvom slučaju se dobije i nova funkcija cilja:

$$P'(x) = P(x) - \sum_k M \cdot x_k, \tag{4.35}$$

   gdje je k broj nebaznih varijabli sa negativnim predznakom, pri čemu $M \to +\infty$, čime se osigurava da vještačke varijable ne ulaze u konačno optimalno rješenje.

Ove dvije situacije predstavljaju ključne postupke u pripremi sistema za pravilno izvođenje simpleks metode. U nastavku će biti prikazan zadatak koji ilustruje primjenu ovih principa, pokazujući kako se degeneracija početne vršne tačke i negativne komponente vektora b mogu riješiti u praksi.

Zadatak 34.

Neka je zadat problem linearnog programiranja:

$$\max P(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

pri čemu je oblast pretraživanja ograničena sa:

$$\Omega : \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Zadatak riješiti primjenom simpleks metode.

Rješenje zadatka 34:

Budući da za rješavanje zadatka primjenom simpleksnog algoritma sva ograničenja moraju imati oblik jednakosti, izvršit će se prevođenje iz nejednačina u jednačine dodavanjem slack varijabli. Također, budući da se u ovom slučaju radi i o početnoj degeneraciji vršne tačke (prva dva ograničenja su nule: $b_1 = 0$ i $b_2 = 0$), komponente b_1 i b_2 se zamjenjuju sa ε i 2ε kako bi se izbjegla degeneracija.

U tom slučaju se dobije:

$$\begin{gathered} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = \varepsilon \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 2 \cdot \varepsilon \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_7 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

Funkcija cilja u ovom slučaju postaje:

$$\max P(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$$

U ovom slučaju imamo tri bazne varijable: x_1, x_2, x_3, tri nebazne varijable: x_4, x_6, x_7 i jednu vještačku varijablu: x_5.

Shodno novoformiranoj funkciji cilja i jednačinama, odgovarajuće matrice su:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 2 \cdot \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formira se početna simpleks tabela 4.28.

Tabela 4.28: Početna simpleks tabela – zadatak 34.

x_i	C_i	C_j / b_i	C_1 / a_1	C_2 / a_2	C_3 / a_3	C_4 / a_4	C_5 / a_5	C_6 / a_6	C_7 / a_7	Provj.	θ
x_5	$-M$	ε	-2	2	2	-1	1	0	0	$2+\varepsilon$	$0.5\,\varepsilon$
x_6	0	2ε	1	-2	5	0	0	1	0	$5+2\varepsilon$	$-\varepsilon$
x_7	0	5	1	2	4	0	0	0	1	13	2.5
$P(x)$	$-M\varepsilon$	S_j	$2M$	$-2M$	$-2M$	M	$-M$	0	0		
		$C_j - S_j$	$2 - 2M$	$2 + 2M$	$2 + 2M$	$-M$	0	0	0		

Iz prve simpleks tabele 4.28 zaključuje se da je vodeći element $a_{12} = 2$. Element množenja za elemente drugog reda je $a_{22} = -2$, dok je element množenja za elemente trećeg reda $a_{32} = 2$. Također se vidi da iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_5, a da ulazi bazna varijabla x_2.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.29.

Tabela 4.29: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 34.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
x_2	2	$0.5 \cdot \varepsilon$	-1	1	1	-0.5	0.5	0	0	$1 + 0.5 \cdot \varepsilon$	$-0.5 \cdot \varepsilon$
x_6	0	$3 \cdot \varepsilon$	-1	0	7	-1	1	1	0	$7 + 3 \cdot \varepsilon$	$-3 \cdot \varepsilon$
x_7	0	$5 - \varepsilon$	3	0	2	1	-1	0	1	$11 - \varepsilon$	$1.6 - 0.33 \cdot \varepsilon$
$P(x)$	ε	S_j	-2	2	2	-1	1	0	0		
		$C_j - S_j$	4	0	0	1	$-M - 1$	0	0		

Iz druge simpleks 4.29 zaključuje se da je vodeći element $a_{31} = 3$. Element množenja za elemente prvog reda je $a_{11} = -1$, dok je element množenja za elemente drugog reda $a_{21} = -1$. Također se vidi da iz razmatranja izlazi nebazna x_7 varijabla, a da ulazi bazna varijabla x_1. Formira se sljedeća simpleks tabela 4.30.

Tabela 4.30: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 34.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
x_2	2	$\frac{10+\varepsilon}{6}$	0	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{28+\varepsilon}{6}$	
x_6	0	$\frac{5+8\varepsilon}{3}$	0	0	$\frac{23}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{32+8\varepsilon}{3}$	
x_1	2	$\frac{5-\varepsilon}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{11-\varepsilon}{3}$	
$P(x)$	$\frac{20}{3}$	S_j	2	2	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$		
		$C_j - S_j$	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-M - \frac{1}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.30 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Neka je $\varepsilon \to 0$ rješenja iz simpleks tabele 4.30 su:

$$x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = 0,$$

a vrijednost funkcije cilja je:

$$P^*(x) = \frac{20}{3}.$$

Zadatak 35.

Neka je zadat problem linearnog programiranja:

$$\max P(x) = 90x_1 + 85x_2 + 90x_3$$

pri čemu je oblast pretraživanja ograničena sa:

$$\Omega : \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 \leq 600 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 10 \\ x_i \geq 0 \end{array}$$

Zadatak riješiti primjenom simpleks metode.

Rješenje zadatka 35:

Budući da za rješavanje zadatka primjenom simpleksnog algoritma sva ograničenja moraju imati oblik jednakosti, prvo je potrebno izvršiti prevođenje iz nejednačina u jednačine dodavanjem slack varijabli. Prevođenjem se dobije:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 600$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 10$$

$$x_i \geq 0$$

Funkcija cilja u ovom slučaju postaje:

$$P(x) = 90x_1 + 85x_2 + 90x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M \cdot x_6 \quad \longrightarrow \quad \max$$

U ovom slučaju su tri bazne varijable (x_1, x_2, x_3), dvije nebazne varijable (x_4, x_5) i jedna vještačka varijabla (x_6).

Shodno novoformiranoj funkciji cilja i jednačinama, odgovarajuće matrice su:

$$C = \begin{bmatrix} 90 & 85 & 90 & 0 & 0 & -M \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 600 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formira se početna simpleks tabela 4.31. Iz prve simpleks tabele zaključuje se da je vodeći element $a_{21} = 1$, te da je element množenja za elemente prvog reda $a_{11} = 1$. Iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_6, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_1.

Tabela 4.31: Početna simpleks tabela - zadatak 35.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_4	0	600	1	1	1	1	0	0	604	600
x_6	-M	10	1	1	-1	0	-1	1	11	10
$P(x)$	$-10M$	S_j	-M	-M	M	0	M	-M		
		$C_j - S_j$	90+M	85+M	90-M	0	-M	0		

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.32.

Tabela 4.32: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 35.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_4	0	590	0	0	2	1	1	-1	593	295
x_1	90	10	1	1	-1	0	-1	1	11	-10
$P(x)$	90	S_j	90	90	-90	0	-90	90		
		$C_j - S_j$	0	-5	180	0	90	-M-90		

Iz druge simpleks tabele 4.32 se zaključuje da je vodeći element $a_{13} = 2$, te da je element množenja za elemente drugog reda $a_{23} = -1$. Iz razmatranja izlazi nebazna varijabla x_4, a na njeno mjesto ulazi bazna varijabla x_3. Formira se sljedeća simpleks tabela 4.33.

Tabela 4.33: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 35.

x_i	C_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_3	90	295	0	0	1	0.5	0.5	-0.5	296.5	
x_1	90	305	1	1	0	0.5	-0.5	0.5	307.5	
$P(x)$	54000	S_j	90	90	90	90	0	0		
		$C_j - S_j$	0	-5	0	-90	0	-M		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.33 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Očitavanjem iz simpleks tabele 4.33, rješenje problema je: $x_1 = 305, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 295, \quad P(x) = 54000$. U vektorskom obliku:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (305, 0, 295), \quad P(x^*) = 54000$$

4.4.3 Skaliranje problema linearnog programiranja

Ukoliko su elementi svih matrica problema istog reda veličine, kaže se da je problem dobro skaliran. U suprotnom, može doći do greške zaokruživanja, naročito pri ručnom rješavanju problema. Da bi se takve greške izbjegle, provodi se postupak skaliranja problema, koji se najlakše realizuje u tabličnoj formi 4.34.

Tabela 4.34: Skaliranje problema linearnog programiranja

P	c_1	c_2	$\cdots$	c_{m+n}	α_i/β_i
b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	$a_{1,m+n}$	
b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	$a_{2,m+n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	$a_{m,m+n}$	

Prvo se množenjem elemenata svakog reda koeficijentima β ujednačavaju elementi po kolonama, kako je prikazano u tabeli 4.35.

Tabela 4.35: Ujednačavanje elemenata po kolonama

$\beta_P P$	$\beta_P c_1$	$\beta_P c_2$	$\cdots$	$\beta_P c_{m+n}$	α_i/β_i
$\beta_1 b_1$	$\beta_1 a_{11}$	$\beta_1 a_{12}$	$\cdots$	$\beta_1 a_{1,m+n}$	β_1
$\beta_2 b_2$	$\beta_2 a_{21}$	$\beta_2 a_{22}$	$\cdots$	$\beta_2 a_{2,m+n}$	β_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\beta_{m+n} b_m$	$\beta_{m+n} a_{m1}$	$\beta_{m+n} a_{m2}$	$\cdots$	$\beta_{m+n} a_{m,m+n}$	β_{m+n}

Vrijednosti M i ε se ne skaliraju. Nakon toga se množenjem elemenata svake kolone koeficijentima α_j ujednačavaju elementi po redovima, kako je prikazano u tabeli 4.36.

Napomena: U tablicama su indeksi β_i pridruženi redovima ($i = 1, \ldots, m$), a indeksi α_j pridruženi kolonama ($j = 1, \ldots, m + n$).

Skalirani problem se rješava na standardni način, a stvarna rješenja se dobijaju u skladu sa izrazima:

$$P = \frac{P_{skal}}{\alpha_p \beta_p} \tag{4.36}$$

$$x_j = x_{jskal} \frac{\alpha_j}{\beta_p} \tag{4.37}$$

Tabela 4.36: Ujednačavanje elemenata po redovima

α_P	α_1	α_2	$\cdots$	α_{m+n}	α_j/β_i
$\alpha_P\beta_P P$	$\alpha_1\beta_P c_1$	$\alpha_2\beta_P c_2$	$\cdots$	$\alpha_{m+n}\beta_P c_{m+n}$	β_P
$\alpha_P\beta_1 b_1$	$\alpha_1\beta_1 a_{11}$	$\alpha_2\beta_1 a_{12}$	$\cdots$	$\alpha_{m+n}\beta_1 a_{1,m+n}$	β_1
$\alpha_P\beta_2 b_2$	$\alpha_1\beta_2 a_{21}$	$\alpha_2\beta_2 a_{22}$	$\cdots$	$\alpha_{m+n}\beta_2 a_{2,m+n}$	β_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_P\beta_m b_m$	$\alpha_1\beta_m a_{m1}$	$\alpha_2\beta_m a_{m2}$	$\cdots$	$\alpha_{m+n}\beta_m a_{m,m+n}$	β_m

Zadatak 36.

Dat je problem linearnog programiranja sa funkcijom cilja:

$$P(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

uz ograničenja:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 300, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Odrediti maksimum funkcije $P(x)$, skalirati problem i riješiti ga simpleks metodom.

Rješenje zadatka 36:

Uvođenjem tri slack varijable x_4, x_5, x_6, gdje su $x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$, dobiju se ograničenja oblika:

$$\Omega : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 200, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 500, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 300, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Skalirat će se dobiveni sistem ograničenja u tabličnoj formi 4.37.

Tabela 4.37: Skaliranje problema linearnog programiranja - zadatak 36

							α_i / β_i
–	2	3	1	0	0	0	1
200	1	1	2	1	0	0	1
500	3	2	1	0	1	0	1
300	1	2	2	0	0	1	1

Izborom $\beta_i = 1$ skaliranje redova praktički daje istu tabelu (vrijednosti u redovima su približno istog reda veličine, pogledati tabelu 4.38), pri čemu se bira skaliranje po kolonama, tj. α_i.

Tabela 4.38: Ujednačavanje elemenata po redovima - zadatak 36

10^{-2}	1	1	1	1	1	1	α_i / β_i
–	2	3	1	0	0	0	1
200	1	1	2	1	0	0	1
500	3	2	1	0	1	0	1
300	1	2	2	0	0	1	1

Prema tome, skaliranjem elemenata po kolonama se dobije tabela 4.39).

Tabela 4.39: Ujednačavanje elemenata po kolonama - zadatak 36

10^{-2}	1	1	1	1	1	1	α_i / β_i
–	2	3	1	0	0	0	1
2	1	1	2	1	0	0	1
5	3	2	1	0	1	0	1
3	1	2	2	0	0	1	1

Vrijednosti su skalirane, jer su istog reda veličine. Vrijednosti $\alpha_p = 10^{-2}$, $\beta_p = 1$ su posebno naznačene u prethodnoj tabeli 4.39) (ove vrijednosti će trebati pri prijelazu na rješenje primarnog problema).

U nastavku formira se početna simpleks tabela 4.40 na osnovu skaliranih vrijednosti.

Tabela 4.40: Početna simpleks tabela - zadatak 36.

x_i	C_i	C_j	2	3	1	0	0	0	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_4	0	2	1	1	2	1	0	0	7	2
x_5	0	5	3	2	1	0	1	0	12	2.5
x_6	0	3	1	2	2	0	0	1	9	1.5
$P(x)$	0	S_j	0	0	0	0	0	0		
		$C_j - S_j$	2	3	1	0	0	0		

Iz prve simpleks tabele 4.40 se vidi da je maksimalan pozitivan element u redu $C_j - S_j$ koji ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna promenjiva x_2, a minimalan pozitivan u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promenjiva x_6. Također, iz datih razmatranja može se videti da vodeći element postaje $a_{32} = 2$, element množenja za elemente prvog reda $a_{12} = 1$, dok je za elemente drugog reda $a_{22} = 2$.

Formira se sljedeća simpleks tabela 4.41.

Tabela 4.41: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 36.

x_i	C_i	C_j	2	3	1	0	0	0	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_4	0	0.5	0.5	0	1	1	0	-0.5	2.5	1
x_5	0	2	2	0	-1	0	1	-1	3	1
x_2	3	1.5	0.5	1	1	0	0	0.5	4.5	3
$P(x)$	4.5	S_j	1.5	3	3	0	0	1.5		
		$C_j - S_j$	0.5	0	-2	0	0	-1.5		

Vidi se da se ne može izabrati neko θ, jer se u ovom slučaju radi o degeneraciji vršne tačke (degenerisan dozvoljeni skup vrijednosti rješenja). Promijenit će se jedan od elemenata vektora b_i za neko pozitivno i dovoljno malo ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$. U ovom zadatku proizvoljno je izabran prvi red. Prema tome, simpleks tabela će izgledati kao u 4.42.

Iz tabele u 4.42 se vidi da u razmatranje ulazi bazna promjenljiva x_1, a iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva x_4. Vodeći element postaje $a_{11} = 0.5$, element množenja za elemente drugog reda je $a_{21} = 2$, dok je element množenja za elemente trećeg reda $a_{13} = 0.5$.

Tabela 4.42: Simpleks tabela prve iteracije (degeneracija)- zadatak 36.

x_i	C_i	C_j	2	3	1	0	0	0	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_4	0	$0.5-\varepsilon$	0.5	0	1	1	0	-0.5	2.5	$1-2\varepsilon$
x_5	0	2	2	0	-1	0	1	-1	3	1
x_2	3	1.5	0.5	1	1	0	0	0.5	4.5	3
$P(x)$	4.5	S_j	1.5	3	3	0	0	1.5		
		$C_j - S_j$	0.5	0	-2	0	0	-1.5		

Formira se nova simpleks tabela 4.43.

Tabela 4.43: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 36.

x_i	C_i	C_j	2	3	1	0	0	0	Provj.	θ
		b_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_1	2	$1-2\varepsilon$	1	0	2	2	0	-1	$5-2\varepsilon$	
x_5	0	4ε	0	0	-5	-4	1	1	$-7+4\varepsilon$	
x_2	3	$1+\varepsilon$	0	1	0	-1	0	1	$2+\varepsilon$	
$P(x)$	$5-\varepsilon$	S_j	2	3	4	1	0	1		
		$C_j - S_j$	0	0	-3	-1	0	-1		

Budući da u koloni $C_j - S_j$ tabele 4.43 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Očitanjem iz simpleks tabele 4.43 vidi se da je:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$$

i da je funkcija cilja.

$$P(x^*) = P(1, 1, 0) = 5.$$

Ovo predstavlja rješenje skaliranog problema. Prijelaz iz skaliranog u primarni problem proizilazi iz jednačina (4.36) i (4.37).

Slijedi da je tačka optimuma primarnog problema opisana koordinatama:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 0.$$

Vrijednost funkcije u toj tački je:

$$P(x^*) = P(100, 100, 0) = 500.$$

4.5 Primjena dualne simpleksne metode na rješavanje problema linearnog programiranja

Ranije je definisan problem linearnog programiranja kao:

$$f(x) = C^T x$$

uz ograničenja oblika

$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b$$

$$x \geq 0,$$

Ovaj problem linearnog programiranja ima svoj dualni problem koji se može definisati kao:

$$\min W(\lambda) = b^T \lambda \tag{4.38}$$

$$\begin{gathered} A^T \cdot \lambda \geq C \\ \lambda_i \geq 0 \end{gathered} \tag{4.39}$$

Pravila za formiranje dualnog problema

1. Ako primarni problem rješava problem maksimizacije funkcije cilja, njegov dual rješava problem minimizacije odgovarajuće dualne funkcije cilja.
2. Koeficijenti funkcije cilja (C^T) primarnog problema linearnog programiranja postaju slobodni članovi u balansnim uslovima dualnog problema linearnog programiranja.
3. Slobodni članovi iz balansnih uslova primarnog problema postaju koeficijenti funkcije cilja dualnog problema.
4. Matrica ograničenja (A^T) dualnog problema je transponovana matrica A primarnog problema.
5. Nejednakosti balansnih uslova dualnog problema su suprotnog znaka u odnosu na primarni problem.
6. Broj promjenljivih dualnog problema jednak je broju ograničenja primarnog problema, a broj ograničenja dualnog problema je jednak broju promjenljivih primarnog problema.
7. Ako je neka promjenljiva primarnog problema slobodna po znaku, tada je njoj odgovarajuće ograničenje duala predstavljeno jednakošću.
8. Ako je neko ograničenje primarnog problema predstavljeno jednakošću, njemu odgovarajuća promjenljiva duala je slobodna po znaku.
9. Uvijek važi nejednakost $b^T \cdot \lambda \geq C^T \cdot x$, a u tačkama optimuma je ono granično zadovoljeno.

Određivanje rješenja primarnog problema iz dualnog problema:

1. Pomnožiti sa (-1) sve vrijednosti simpleksnih razlika u kolonama slack varijabli kako bi se dobile vrijednosti strukturnih varijabli (one koje nisu slack niti vještačke) primarnog problema.
2. Pomnožiti sa (-1) sve vrijednosti simpleksnih razlika u kolonama strukturnih varijabli duala kako bi se dobile vrijednosti slack varijabli primarnog problema.

Zadatak 37.

Neka je zadat problem linearnog programiranja:

$$\max P(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

pri čemu je oblast pretraživanja ograničena sa:

$$\Omega : \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Zadatak riješiti primjenom tabličnog dualnog simpleksne metode.

Rješenje zadatka 37:

Zbog potrebe za rješavanjem zadatka upotrebom dualnog simpleksnog tabličnog algoritma potrebno je odrediti broj promjenljivih dualnog problema kao i broj ograničenja:

- Očito je da početni problem posjeduje tri promjenljive (x_1, x_2 i x_3), stoga će dualni problem imati tri ograničenja.
- Primarni problem posjeduje četiri ograničenja, pa će dualni problem imati četiri promjenljive ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$).
- Kako je x_3 slobodna po znaku, to će treće ograničenje dualnog problema biti tipa jednakosti.
- Četvrto ograničenje primarnog problema je jednakost, pa će zbog toga četvrta promjenljiva (λ_4) dualnog problema biti slobodna po znaku.

Da bi se odredile matrice A, b, C početnog problema potrebno je ograničenja svesti na standardnu formu, tj. na oblik: $Ax \leq b$. Zbog prevođenja u standardnu formu potrebno je treće ograničenje primarnog problema pomnožiti sa (-1), čime se dobije:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 20$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$-4x_1 - 3x_2 - 6x_3 \geq -5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Sada su matrice A, b, C date kao:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Formira se funkcija cilja dualnog problema kao:

$$\min\{W(\lambda)\} = \min\{b^T\lambda\} = -\max\{-20\lambda_1 - 8\lambda_2 + 5\lambda_3 - 6\lambda_4\}.$$

gdje je:

$$\Omega : \begin{cases} A^T\lambda \geq C, \\ \lambda_i \geq 0, \end{cases}$$

Što eksplicitno daje:

$$\begin{gathered} 5\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_4 \geq 2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 \geq 1, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3 + \lambda_4 = -3, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{gathered}$$

Pri čemu je funkcija cilja data kao $-\max\big(-20\lambda_1 - 8\lambda_2 + 5\lambda_3 - 6\lambda_4 + 6\lambda_5\big)$). Radi rješavanja zadatka tabličnim simpleksnim algoritmom potrebno je sistem nejednakosti svesti na sistem jednakosti uvođenjem slack i vještačkih varijabli. Pri tome treba voditi računa da kad god se u sistem doda nebazna varijabla sa negativnim predznakom tada se njoj pridružuje jedna vještačka pozitivna. Ova vještačka varijabla u funkciji cilja se množi sa $-M$, pri čemu $M \to +\infty$. Također, potrebno je treću jednačinu pomnožiti sa (-1) da se izbjegne da se u simpleks tabelu ulazi sa komponentom koja je manja od nule.

Vodeći računa o navedenom može se pisati da je:

$$\begin{gathered} 5\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 = 2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_8 - \lambda_9 = 1, \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_1 0 = 3, \\ \lambda_i \geq 0 \end{gathered}$$

Dok je funkcija cilja data kao:

$$\begin{aligned} -\max W(\lambda) = -20\lambda_1 - 8\lambda_2 + 5\lambda_3 - 6\lambda_4 + 6\lambda_5 \\ + 0 \cdot \lambda_6 - M \cdot \lambda_7 + 0 \cdot \lambda_8 - M \cdot \lambda_9 - M \cdot \lambda_{10} \end{aligned}$$

Potrebno je napomenuti da u simpleks tabelu ulaze nebazne varijable (slack ili vještačke) sa pozitivnim predznakom.

U prve dvije jednačine uvedene su vještačke varijable (λ_7 i λ_9), međutim zadnje ograničenje je bilo tipa jednakosti. Ukoliko bi se u simpleks tabelu ušlo samo sa ove dvije promjenljive, izgubiće se jedno rješenje (promjenljive λ_7 i λ_9 nose informacije o vrijednostima x_1 i x_2 primarnog problema, jer vrijednosti ovih kolona u $(-b_j - S_j)$ pomnožene sa (-1) daju ove vrijednosti).

Zbog toga je u trećem ograničenju uvedena dodatna vještačka promjenljiva λ_{10} da bi se dobila jedinična matrica.

Formira se početna simpleks tabela (4.44). Iz prve simpleks tabele (4.44) se vidi da maksimalan pozitivan element u redu $(-b_j - S_j)$ ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna promjenljiva λ_1, a minimalan pozitivan u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva λ_7. Također, iz datih razmatranja vidi se da vodeći element postaje $a_{11} = 5$, element množenja za elemente drugog reda je $a_{21} = 2$, dok je za elemente trećeg reda $a_{31} = -4$.

Formira se sljedeća simpleks tabela (4.46). Maksimalan pozitivni element u redu $(-b_j - S_j)$ ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna promjenljiva λ_3, a minimalan pozitivan u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva λ_{10}. Također, iz datih razmatranja vidi se da vodeći element postaje $a_{33} = 2.8$, element množenja za elemente prvog reda je $a_{13} = -0.8$, dok je za elemente drugog reda $a_{23} = -1.4$.

Prema tome, formira se treća simpleks tabela (4.46). Maksimalan pozitivan element u redu $(-b_j - S_j)$ ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna promjenljiva λ_4, a minimalan pozitivan u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna promjenljiva λ_9. Također, iz datih razmatranja vidi se da vodeći element postaje $a_{24} = 0.5$, element množenja za elemente prvog reda je $a_{14} = 0.14$, dok je za elemente trećeg reda $a_{34} = -0.07$.

Formira se četvrta simpleks tabela (4.47).

Budući da u koloni $(-b_j - S_j)$ tabele (4.47) ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum.

Očitanjem iz tabele (4.47) vidi se da je:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \{1, 0, 2, 5, 0\}.$$

$$W^* = 40.$$

Budući da su λ_6, λ_8 i λ_{10} slack varijable, vrijednosti ovih kolona u $(-b_j - S_j)$, pomnožene sa (-1), daju tačke optimuma primarnog problema, odnosno:

$$x_1 = 7.15, \quad x_2 = 5.57.$$

Vrijednost x_3 se iščitava direktno iz kolone S_j, tj.

$$x_3 = -6.72,$$

i funkcija cilja u optimumu je $P(x^*) = P^* = 40$. Dakle, rješenje primarnog problema je:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (7.15, 5.57, -6.72), \quad P^* = 40.$$

Tabela 4.44: Početna simpleks tabela - zadatak 37.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-20	-8	5	-6	6	0	$-M$	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}		
λ_7	$-M$	2	5	1	-4	1	-1	-1	1	0	0	0	4	0.4
λ_9	$-M$	1	2	1	-3	1	-1	0	0	-1	1	0	1	0.5
λ_{10}	$-M$	3	-4	-2	6	-1	1	0	0	0	0	1	4	-0.75
$-W(\lambda)$	$-6M$	S_j	-3M	0	M	-M	M	M	-M	M	-M	-M		
		$-b_j - S_j$	$3M - 20$	-8	$5 - M$	$M - 6$	$6 - M$	$-M$	0	$-M$	0	0		

Tabela 4.45: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 37.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-20	-8	5	-6	6	0	$-M$	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}		
λ_1	-20	0.4	1	0.2	-0.8	0.2	-0.2	-0.2	0.2	0	0	0	0.6	-0.5
λ_9	$-M$	0.2	0	0.6	-1.4	0.6	-0.6	0.4	-0.4	-1	1	0	-0.2	-0.14
λ_{10}	$-M$	4.6	0	-1.2	2.8	-0.2	0.2	-0.8	0.8	0	0	1	6.4	1.64
$-W(\lambda)$	$-8-4.8M$	S_j	-20	0.6M-4	16-1.4M	-4-0.4M	4+0.4M	4+0.4M	-4-0.4M	M	-M	-M		
		$-b_j-S_j$	0	-4-0.6M	1.4M-11	-2+0.4M	2-0.4M	-4-0.4M	4+0.4M	-M	0	0		

Tabela 4.46: Simpleks tabela treće iteracije - zadatak 37.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-20	-8	5	-6	6	0	$-M$	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}		
λ_1	-20	1.71	1	-0.14	0	0.14	-0.14	-0.43	0.43	0	0	0.28	2.43	12
λ_9	$-M$	2.5	0	0	0	0.5	-0.5	0	0	-1	1	0.49	3	5
λ_3	5	1.64	0	-0.43	1	-0.07	0.07	-0.29	0.29	0	0	0.36	2.28	-23
$-W(\lambda)$	-26-2.5M	S_j	-20	0.72	5	-3.2-0.5M	3.2+0.5M	7.14	-7.14	M	-M	-3.8-0.5M		
		$-b_j - S_j$	0	-8.72	0	0.5M-2.8	2.8-0.5M	-7.14	-M+7.14	-M	0	3.8-0.5M		

Tabela 4.47: Simpleks tabela četvrte iteracije - zadatak 37.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-20	-8	5	-6	6	0	$-M$	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}		
λ_1	-20	1	1	-0.14	0	0	0	-0.43	0.43	0.28	-0.28	0.14		
λ_4	-6	5	0	0	0	1	-1	0	0	-2	2	1		
λ_3	5	2	0	-0.43	1	0	0	-0.28	0.28	-0.14	0.14	0.43		
$-W(\lambda)$	-40	S_j	-20	0.72	5	-6	6	7.15	-7	5.57	-5.57	-6.72		
		$-b_j - S_j$	0	-8.72	0	0	0	-7.15	-M+7	-5.57	-M+5.57	-M+6.72		

Zadatak 38.

Neka je zadat problem linearnog programiranja:

$$\max P(x) = 2x_1 + 3x_2$$

pri čemu je oblast pretraživanja predstavljena sa:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Riješiti dualni problem tabličnim simpleksnim metodom i, na osnovu rješenja dualnog problema, odrediti rješenje primarnog problema.

Rješenje zadatka 38:

Zbog potrebe za rješavanjem zadatka upotrebom dualnog problema, prvo će se odrediti broj promjenljive dualnog problema kao i broj ograničenja:

- Očito je da početni problem posjeduje dvije promjenljive (x_1 i x_2), stoga će dualni problem imati dva ograničenja.
- Primarni problem posjeduje dva ograničenja, pa će dualni problem imati dvije promjenljive (λ_1 i λ_2).
- Budući da je x_1 slobodna po znaku, prvo ograničenje dualnog problema bit će tipa jednakosti.

Matrice A, b, C početnog problema su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sada će se formirati funkcija cilja dualnog problema kao:

$$\min\{W(\lambda)\} = \min\{b^T\lambda\} = -\max\{-3\lambda_1 - 2\lambda_2\}.$$

gdje je:

$$\Omega : \begin{cases} A^T\lambda \geq C, \\ \lambda_i \geq 0, \end{cases}$$

Što eksplicitno daje:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$
$$\lambda_i \geq 0.$$

Da bi se riješio dati problem simpleksnim tabličnim metodom, potrebno je uvesti jednu slack varijablu za drugo ograničenje i dvije vještačke promjenljive kako bi se mogla odrediti početna vršna tačka. Ovim početni sistem prelazi u:

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 2,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5 = 3$$

$$\lambda_i \geq 0.$$

Pri čemu je funkcija cilja data kao:

$$-\max\big(-3 \cdot \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 - 0 \cdot \lambda_3 - M \cdot \lambda_4 - M \cdot \lambda_5\big).$$

Potrebno je napomenuti da u simpleks tabelu ulaze nebazne varijable (slack ili vještačke) sa pozitivnim predznakom.

Formira se početna simpleks tabela 4.48.

Tabela 4.48: Početna simpleks tabela - zadatak 38.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-3	-2	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5		
λ_4	$-M$	2	1	-1	0	1	0	3	2
λ_5	$-M$	3	1	1	-1	0	1	5	3
$-W(\lambda)$	$-5M$	S_j	-2M	0	M	-M	-M		
		$-b_j - S_j$	2M-3	-2	-M	0	0		

Iz prve simpleks tabele 4.48 se vidi da maksimalan pozitivan element u redu $(-b_j - S_j)$ ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna varijabla λ_1, dok minimalan pozitivan u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna varijabla λ_4. Također, iz datih razmatranja može se vidjeti da vodeći element postaje $a_{11} = 1$, dok je element množenja za elemente drugog reda $a_{21} = 1$. Formira se nova simpleks tabela 4.49.

Tabela 4.49: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 38.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-3	-2	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5		
λ_1	-3	2	1	-1	0	1	0	3	-2
λ_5	$-M$	1	0	2	-1	-1	1	2	0.5
$-W(\lambda)$	$-M$	S_j	-3	-2M	M	M	-M		
		$-b_j - S_j$	0	2M+2	-M	-2M	0		

Iz druge simpleks tabele 4.49 se vidi da je maksimalan pozitivan element u redu $(-b_j - S_j)$ koji ukazuje na to da u razmatranje ulazi bazna varijabla λ_2, a minimalan pozitivan element u koloni θ ukazuje na to da iz razmatranja izlazi nebazna varijabla λ_5. Također, iz datih razmatranja vidi se da vodeći element postaje $a_{22} = 2$, dok je element množenja za elemente prvog reda $a_{12} = -1$.

Formira se nova simpleks tabela 4.50.

Tabela 4.50: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 38.

λ_i	$-b_i$	$-b_j$	-3	-2	0	$-M$	$-M$	Prov.	θ
		b_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5		
λ_1	-3	2	1	-1	0	1	0	3	-2
λ_5	$-M$	1	0	2	-1	-1	1	2	0.5
$-W(\lambda)$	$-M$	S_j	-3	-2M	M	M	-M		
		$-b_j - S_j$	0	2M+2	-M	-2M	0		

Budući da u koloni $(-b_j - S_j)$ tabele 4.50 ne postoji niti jedan pozitivan element, dostignut je optimum. Očitanjem iz tabele 4.50 vidi se da je:

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{2.5, 0.5\}.$$

$$W^* = 8.5.$$

Budući da je λ_3 slack varijabla, vrijednosti ove kolone u $(-b_j - S_j)$ pomnožene sa -1 daju tačku

$$x_2 = 2.5.$$

Međutim, budući da nije uvodena slack varijabla po prvoj varijabli, to znači da je x_1 na pravcu koji definiše to ograničenje, i može se izračunati da je:

$$x_1 = 0.5$$

(ili se može iščitati direktno iz kolone S_j u redu u kojem se nalazi vještačka varijabla pridružena jednakosti, odnosno u redu vještačke varijable λ_4).

Dakle, rješenje je:

$$(x_1^*, x_2^*) = (0.5, 2.5), \quad W^* = 8.5.$$

Ovim primjerima tabličnog rješavanja primarnog i dualnog problema prikazano je kako linearno programiranje, kroz sistematične iteracije i pravilno vođenje simpleks tabela, omogućava precizno i jasno određivanje optimalnih rješenja, čime se stvara osnova za primjenu u složenijim praktičnim problemima.

5

Cjelobrojno programiranje

SADRŽAJ

5.1 Uvod 165
5.2 Metoda Gomorijevih rezova 166
5.3 Branch and bound metoda 167
5.4 Primjena metoda cjelobrojnog programiranja na mješovite probleme 180

Cjelobrojno i mješovito cjelobrojno linearno programiranje predstavljaju ključnu oblast optimizacije u kojoj se precizno kombinuju matematičke metode i algoritamske strategije kako bi se pronašla optimalna rješenja za probleme sa ograničenim, diskretnim resursima. U ovom poglavlju biće prikazani najčešće korišteni algoritmi, uz detaljno objašnjenje principa njihovog djelovanja i postupka rješavanja problema kroz konkretne primjere, uključujući relaksirani linearni problem i postupno grananje ka optimalnom cjelobrojnom rješenju.

5.1 Uvod

U nekim primjenama linearnog programiranja, vrijednosti vektora x mogu imati samo cjelobrojne vrijednosti, tj. umjesto $x \in E^n$ vrijedi da je $x \in Z^n$ (npr. broj proizvedenih dobara). Tada simpleks algoritam neće dati tačno rješenje (osim ako je rješenje cjelobrojno i bez nametanja zahtjeva na cjelobrojnost).

Postoji više pristupa za rješavanje ovakvih problema. Jedan od najčešće korištenih jeste da se riješi linearna relaksacija problema (zanemari se uslov cjelobrojnosti), pa se to rješenje zaokruži na najbližu dozvoljenu cjelobrojnu vrijednost. Taj način daje relativno dobre rezultate ako su rješenja velika po apsolutnoj vrijednosti, pa će zaokruživanje na najbližu cjelobrojnu vrijednost s velikom vjerovatnoćom dati dobro rješenje. Međutim, ova metoda daje loše rezultate za rješenja malog reda veličine.

Kroz više od pola vijeka teorija mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja (eng. *Mixed Integer Linear Programming – MILP*) se razvijala i postala je nezaobilazna u mnogim sferama inženjeringa. Dva osnovna razloga za uspjeh MILP-a jesu solveri koji su bazirani na linearnom programiranju i njegova fleksibilnost.

U praksi se veoma često susreću problemi linearnog programiranja u kojima promjenljive moraju biti cjelobrojne, pa cjelobrojno linearno programiranje zauzima posebno važnu ulogu. U velikom broju primjena modela linearnog programiranja, neke ili čak sve promjenljive smiju imati isključivo cjelobrojne vrijednosti. Na primjer, broj aktivnih mašina u nekoj firmi potrebnih za obavljanje određenih poslova, broj radnika neophodnih za rad na određenom projektu, broj vozila korištenih za neku specifičnu operaciju i slično. Sve ove promjenljive nemaju fizički smisao ako bi imale necjelobrojne vrijednosti, te se problemi linearnog programiranja koji ih uključuju svrstavaju u oblast cjelobrojnog linearnog programiranja. Mnogi problemi cjelobrojnog linearnog programiranja klasificirani su kao teški optimizacijski problemi. Dok opći problem linearnog programiranja može u najgorem slučaju biti riješen u polinomijalnom vremenu, nalaženje optimalnog rješenja za odgovarajući cjelobrojni zadatak u općem slučaju tipično zahtijeva eksponencijalno računarsko vrijeme. Pri tome, može se pokazati da problemi cjelobrojnog linearnog programiranja spadaju u klasu problema koji se u teoriji algoritama nazivaju *NP-teški* problemi. To su problemi za koje je vrlo vjerovatno da efikasni algoritmi za njihovo rješavanje uopće ne postoje [2].

U nastavku će kratko biti obrađeni najčešće korišteni algoritmi za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja.

5.2 Metoda Gomorijevih rezova

Neka se pretpostavi da se nakon primjene simpleks algoritma dobije rješenje koje nije cjelobrojno. Ako se iz vektorske jednačine $Ax = b$ izvuče k-ti red koji odgovara jednom od necjelobrojnih rješenja, dobija se [32]:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \tag{5.1}$$

Svaki od koeficijenata se može podijeliti na cjelobrojni i necjelobrojni dio.

$$\begin{aligned}\lfloor a_{k1}\rfloor x_1 + \lfloor a_{k2}\rfloor x_2 + \cdots + \lfloor a_{kn}\rfloor x_n - \lfloor b_k\rfloor = (\lfloor a_{k1}\rfloor - 1)x_1 + (\lfloor a_{k2}\rfloor - 1)x_2 \\ + \cdots + (\lfloor a_{kn}\rfloor - 1)x_n - (\lfloor b_k\rfloor - 1)\end{aligned} \tag{5.2}$$

Može se primijetiti da su svi koeficijenti sa desne strane nepozitivni. Ako postoji cjelobrojno rješenje, tada je lijeva strana jednačine cjelobrojna. Međutim to za sobom povlači i da je desna strana također cjelobrojna.

Pošto je $-(\lfloor b_k \rfloor - 1)$ jedini pozitivan član i manji je od 1, zaključuje se da sva rješenja moraju biti manja ili jednaka nuli. Odnosno:

$$\lfloor a_{k1} \rfloor x_1 + \lfloor a_{k2} \rfloor x_2 + \cdots + \lfloor a_{kn} \rfloor x_n - \lfloor b_k \rfloor \leq 0, \tag{5.3}$$

$$(\lfloor a_{k1} \rfloor - 1)x_1 + (\lfloor a_{k2} \rfloor - 1)x_2 + \cdots + (\lfloor a_{kn} \rfloor - 1)x_n - (\lfloor b_k \rfloor - 1) \leq 0. \tag{5.4}$$

Iz ove dvije nejednačine dobije se još jedno dodatno ograničenje, koje smanjuje dozvoljenu oblast. Nakon dodavanja tog ograničenja u sve matrice, primjenjuje se dualni simpleks algoritam, koji je detaljno objašnjen u poglavlju IV, zajedno s riješenim primjerima. Ako se i dalje ne dobije cjelobrojno rješenje, procedura se ponavlja.

Treba napomenuti da se traženje Gomorijevih rezova vrši na jednakostima koje nastaju nakon primjene algoritma, a ne na početnim. Te jednakosti se u implementacijama čuvaju u obliku matrica (odnosno tablica pri ručnom proračunu). I simpleks i dualni simpleks algoritam mijenjaju date jednačine na pogodan način.

5.3 Branch and bound metoda

Branch and bound metoda predstavlja jednu od najzastupljenijih metoda kada je u pitanju cjelobrojno linearno programiranje. Ona se zasniva na dijeljenju područja dozvoljenih vrijednosti Ω na veći broj podskupova, gdje se za svaki podskup definiše funkcija kriterija:

$$P_I^{(k)} = \max\{\, c^T x \mid x \in \Omega_k \,\}, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{5.5}$$

Sada se maksimalna vrijednost funkcije kriterija za cijelo područje ograničenja Ω dobija kao:

$$P_I = \max_{k=1,\ldots,p} P_I^{(k)}. \tag{5.6}$$

Dijeljenje se obavlja rekurzivno, dobijajući sve podskupove dozvoljenih vrijednosti. Teoretski, ovo bi moglo trajati dok se ne pronađu sva cjelobrojna rješenja. Međutim, mogu nastati dva problema: neki zadaci imaju beskonačno mnogo rješenja, a čak i konačan broj rješenja može biti prevelik, što znatno produžava vrijeme izvođenja algoritma.

Branch and bound algoritam zbog toga ne istražuje sva rješenja, već samo ona koja su "obećavajuća", tako što postavlja donje i gornje granice unutar kojih se nalazi optimalno rješenje, te na osnovu tih granica odlučuje da li određeni podproblem treba uzimati u obzir ili ne.

Dakle, procedura *branch and bound* algoritma za traženje maksimuma funkcije kriterija P_I bi bila sljedeća:

1. Riješi se relaksirani problem linearnog programiranja. Ukoliko su potrebne varijable cjelobrojne, optimalno rješenje je pronađeno i algoritam terminira. U suprotnom, dobijeno rješenje predstavlja gornju granicu maksimuma funkcije kriterija P_I.

2. Odabire se varijabla x_i koja nije cjelobrojna, a trebalo bi da bude.

3. Na osnovu odabrane varijable vrši se grananje problema na dva podproblema, pri čemu se za svaki podproblem uvodi po jedno dodatno ograničenje po toj varijabli i to:

   – za problem 1: $x_i \leq \lfloor a \rfloor$,
   – za problem 2: $x_i \geq \lceil a \rceil$,

   gdje je a vrijednost varijable x_i koja je dobijena rješavanjem relaksiranog problema linearnog programiranja.

4. Rješava se relaksirani problem linearnog programiranja za svaki od podproblema sa uvedenim ograničenjima. Mogu se javiti tri slučaja:

   – Relaksirani problem nema rješenje. U tom slučaju se data grana više ne razmatra.
   – Dobijeno rješenje zadovoljava uslov da su sve željene varijable cjelobrojne. U tom slučaju se računa funkcija kriterija, Ukoliko do tada nije pronađeno nijedno cjelobrojno rješenje, postavlja se donja granica na vrijednost funkcije kriterija, a ukoliko je već postojalo cjelobrojno rješenje, tada će se donja granica postaviti na vrijednost funkcije kriterija ukoliko je ta vrijednost veća od prethodne donje granice, u suprotnom će ostati nepromijenjena.
   – Dobijeno rješenje ne zadovoljava uslov da su sve željene varijable cjelobrojne. U tom slučaju se računa vrijednost funkcije kriterija, te ukoliko je ta vrijednost veća ili jednaka od donje granice, taj čvor će nastaviti da se grana i ponavlja se procedura 2-4. U suprotnom se ovaj čvor ne uzima u razmatranje.

   Kada algoritam terminira, kao optimalno rješenje se uzima ono koje je sačuvano u donjoj granici.

   Dakle, potrebno je odabrati čvor koji će se razmatrati.

Prilikom izbora čvorova treba uzeti u obzir dvije stvari:

- pronaći (dobro) cjelobrojno rješenje što je moguće ranije. Ovo nudi veliku prednost: obezbjeđuje se donja granica za optimalnu vrijednost rješenja, a dobra donja granica doprinosi tome da se veliki broj čvorova isključi iz razmatranja;
- pretražiti što manji broj čvorova.

Ove dvije stavke su u međusobnom sukobu, pa postoje različite strategije koje pronalaze kompromis kako bi se dobio najbolji rezultat.

Branch and bound algoritam se obično zaustavlja kada više nema aktivnih čvorova — u tom slučaju je pronađeno optimalno rješenje. Međutim, algoritam se može zaustaviti i nakon dostizanja određenog vremenskog ograničenja ili memorijskog limita, ali tada pronađeno rješenje (ukoliko postoji) ne mora biti optimalno. Zbog toga je potrebno procijeniti njegov kvalitet. Kako u svakom trenutku postoji informacija o donjoj i gornjoj granici, ukoliko algoritam terminira zbog vremenskog ili memorijskog ograničenja, razlika između ovih granica uzima se kao procjena kvaliteta pronađenog rješenja. Zbog toga je moguće postaviti razliku između granica kao kriterij zaustavljanja algoritma — prosljeđuje se funkciji neki realni broj kao parametar, i kada ta razlika postane manja od datog parametra, algoritam terminira.

Što se tiče izbora varijable po kojoj se vrši grananje, postoji nekoliko mogućnosti, a najčešće se koristi opcija da se izabere varijabla čiji je decimalni dio bliži 0.5. Drugim riječima [33], ukoliko se definiše

$$f_i = x_i^{(k)} - \lfloor x_i^{(k)} \rfloor \tag{5.7}$$

bira se $h \in I$ tako da je:

$$h = \arg\min_{i \in I} \{min\{f_i, (1 - f_i)\}\}. \tag{5.8}$$

Dakle, može se zaključiti da se ovaj algoritam sastoji od dvije osnovne operacije, na osnovu kojih je i dobio ime, i to:

- *branching* (operacija grananja) - konstrukcija stabla, gdje grane predstavljaju dodatna ograničenja, a čvorovi moguća rješenja;
- *bounding* (operacija ograničavanja) - određivanje funkcije kriterija za dobijena rješenja u svrhu izbjegavanja pretraživanja cjelokupnog stabla, odnosno svih čvorova.

Ova ograničenja se dodaju na već postojeća, pa se na tako dobijeni problem primjenjuje dualni simpleks algoritam, koji je već ranije detaljno objašnjen u poglavlju IV.

Zadatak 39.

Neka je potrebno maksimizirati funkciju kriterija

$$P = \max(5x_1 + 3x_2) \tag{5.9}$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\leq 40, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Rješenje zadatka 39:

U ovom primjeru je razmatran problem sa dvije varijable, gdje je zahtjev da obje varijable budu cjelobrojne.
Na početku se rješava relaksirani problem linearnog programiranja, gdje se zanemari da varijable x_1 i x_2 trebaju biti cjelobrojne. Oblast pretraživanja je predstavljena na slici 5.1

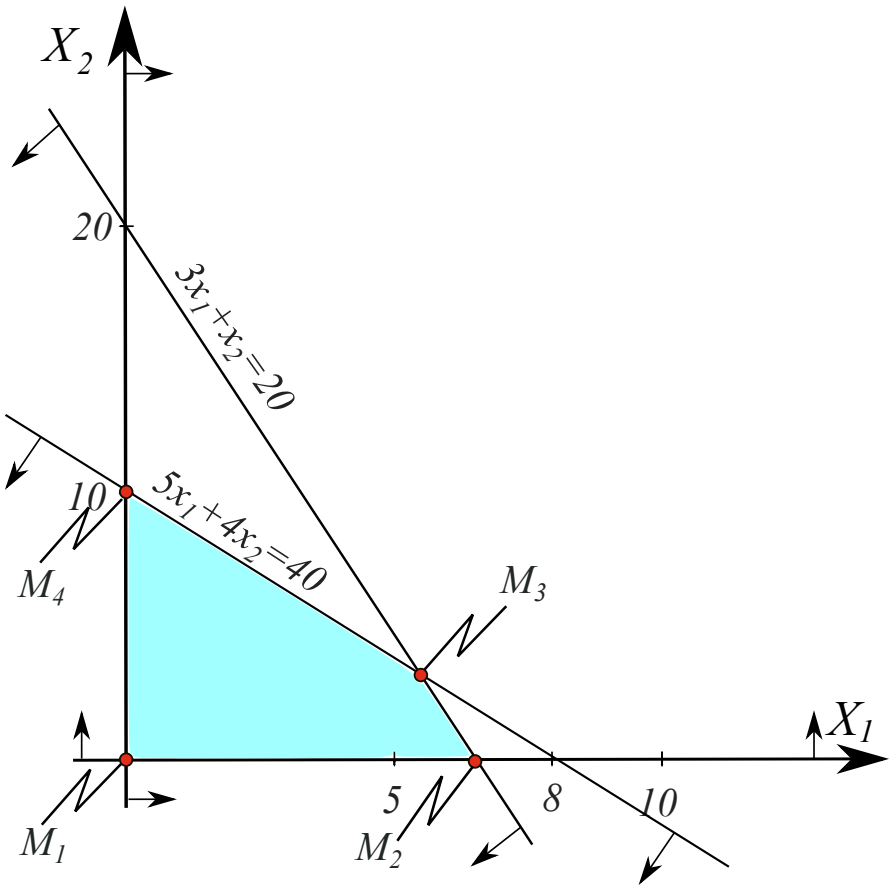
Potrebno je odrediti rješenje relaksiranog problema:

$M_1(0,0) => P(M_1) = 0$
$M_2(0,6.67) => P(M_2) = 20$
$M_3(5.714, 2.857) => P(M_3) = 37.14$
$M_4(0,10) = P(M_4) = 30$

Kao rješenje ovog problema se dobija tačka $M_3(5.714, 2.857)$, pa je optimum funkcije $P^* = 37.14$.

Kao što je rečeno, gornja granica će biti upravo vrijednost kriterija dobijena rješavanjem relaksiranog problema, tj. vrijednost 37.14. Kako varijable nisu cjelobrojne, algoritam se nastavlja. Grananje se vrši po varijabli x_1, te se javljaju dva podproblema, od kojih prvi ima dodatno ograničenje $x_1 \leq 5$, a drugi $x_1 \geq 6$, te je prošireni skup ograničenja za prvi podproblem:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\leq 40, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_1&\leq 5, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$



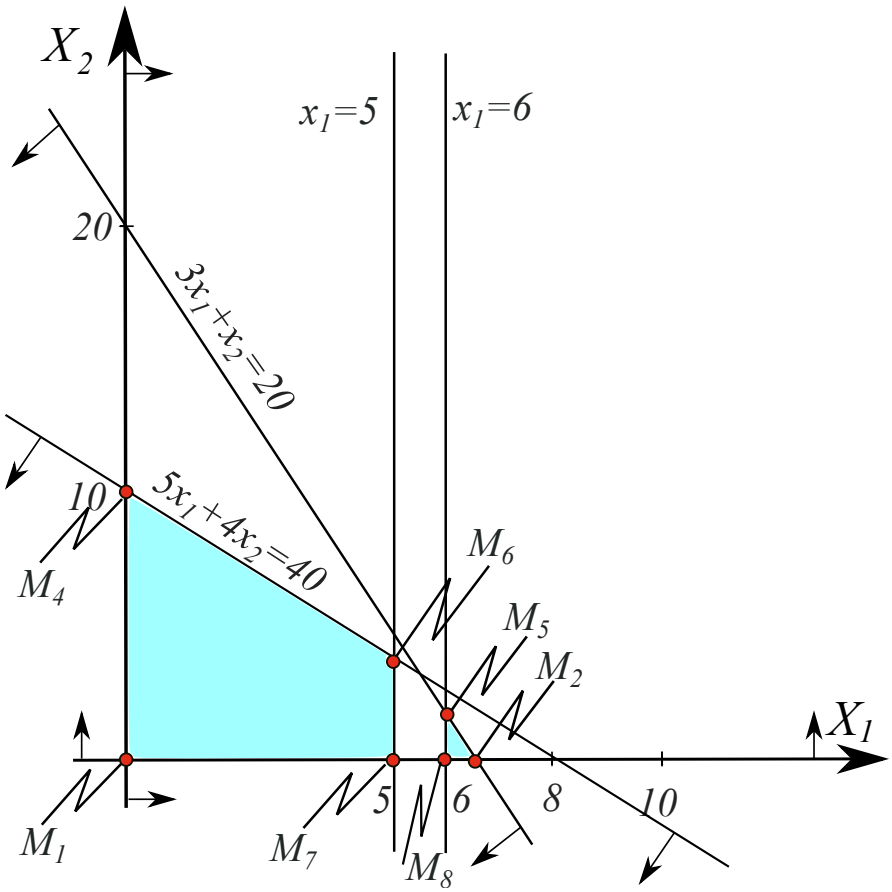
Slika 5.1: Prikaz oblasti pretraživanja za $P(x) = 5x_1 + 3x_2$.

dok se za drugi podproblem javljaju ograničenja:

$$
\begin{gathered}
5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\
3x_1 + x_2 \leq 20, \\
x_1 \geq 0, \\
x_2 \geq 0, \\
x_1 \geq 6, \\
x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

Nova oblast pretraživanja je predstavljena na slici 5.2 na kojoj se mogu uočiti nove vršne tačke $M_5(6, 2)$, $M_6(5, 3.75)$, $M_7(5, 0)$ i $M_8(6, 0)$

Sada je potrebno riješiti dva podproblema P_D koji se odnosi na desni dio oblasti sa slike 5.2 i P_L koji se odnosi na lijevi dio oblasti sa slike 5.2.



Slika 5.2: Prikaz oblasti pretraživanja za $P(x) = 5x_1 + 3x_2$, uz ograničenja $x_1 \leq 5$ i $x_1 \geq 6$.

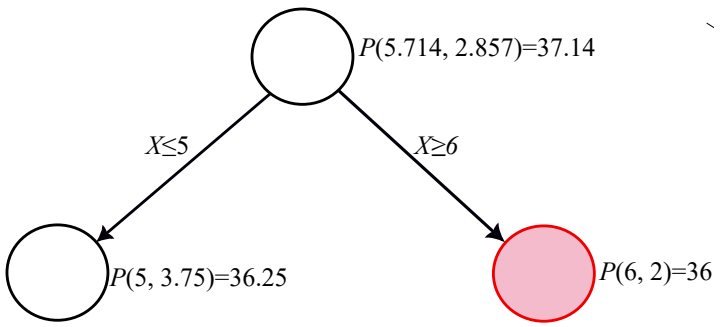
Određuje se rješenje relaksiranog problema P_D u kojem egzistiraju vršne tačke M_2, M_5 i M_8:

$M_2(0, 6.67) => P(M_2) = 20$
$M_5(6, 2) => P(M_5) = 36$
$M_8(6, 0) => P(M_8) = 30$

Potom se određuje rješenje relaksiranog problema P_L u kojem egzistiraju vršne tačke M_1, M_4, M_6 i M_7:

$M_1(0,0) => P(M_1) = 0$
$M_4(0,10) => P(M_4) = 30$
$M_6(5,3.75) => P(M_6) = 36,25$
$M_7(5,0) => P(M_7) = 30$

Rješavanjem relaksiranog oblika podproblema P_D i P_L dobija se da lijevi čvor ima rješenje $(x_1, x_2) = (5, 3.75)$, sa kriterijem $P = 36.25$, dok je rješenje desnog podproblema $(x_1, x_2) = (6, 2)$, sa kriterijem $P = 36$ (slika 5.3).



Slika 5.3: Prvo grananje po varijabli x_1.

Dakle, već je pronađeno jedno cjelobrojno rješenje i donja granica se postavlja na vrijednost 36. Moguće je izvršiti grananje samo lijevog čvora i to po varijabli x_2, zato što je varijabla x_1 cjelobrojna. Time se dobijaju nova dva ograničenja odnosno dvije nove podoblasti. Ako se nove podoblasti označe sa P_{LG} i P_{LD}, tada su sljedeća ograničenja.

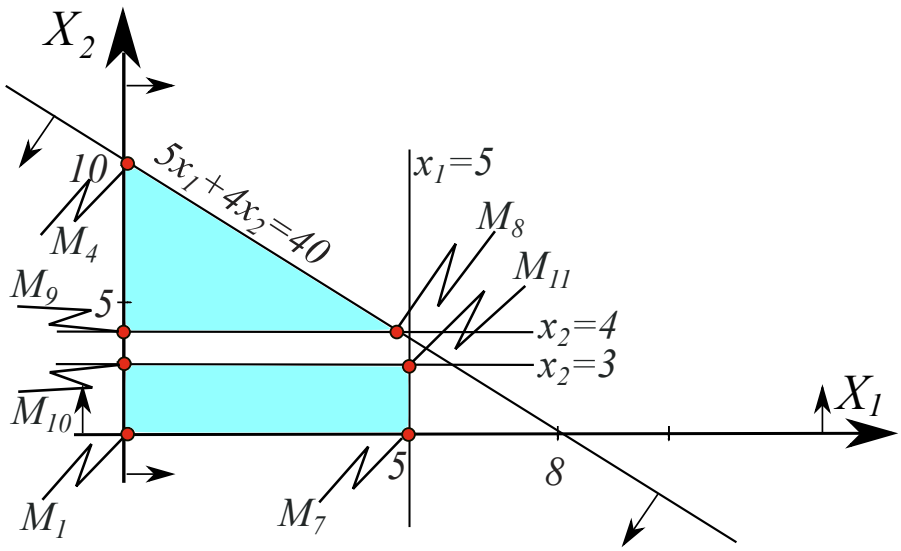
a)Za oblast P_{LG}:

$$\begin{gathered} 5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\ 3x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

b) Za oblast P_{LD}:

$$
\begin{gathered}
5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\
3x_1 + x_2 \leq 20, \\
x_1 \geq 0, \\
x_2 \leq 3, \\
x_1 \leq 5, \\
x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

Oblast dobivena grananjem po varijabli x_2 je prikazana na slici 5.4.



Slika 5.4: Prikaz oblasti pretraživanja za $P(x) = 5x_1 + 3x_2$, uz ograničenja $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 3$ i $x_2 \geq 4$.

Novodobivena oblast pretraživanja P_L je predstavljena na slici 5.4 na kojoj se mogu uočiti nove vršne tačke $M_8(4.8, 4)$, $M_9(0, 4)$, $M_{10}(0, 3)$ i $M_{11}(5, 3)$.

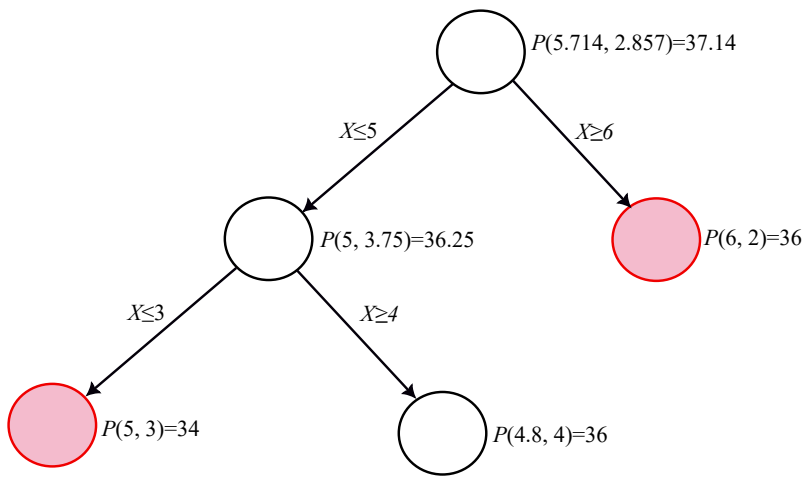
Određuje se rješenje relaksiranog problema P_{LG} u kojem egzistiraju vršne tačke M_4, M_8 i M_9:

$M_4(0, 10) => P(M_4) = 30$
$M_8(4.8, 4) => P(M_8) = 36$
$M_9(0, 5) => P(M_9) = 15$

Određuje se rješenje relaksiranog problema P_{LD} u kojem egzistiraju vršne tačke M_1, M_7, M_{10} i M_{11}:

$M_1(0,0) => P(M_1) = 0$
$M_7(5,0) => P(M_7) = 25$
$M_{10}(0,3) => P(M_{10}) = 9$
$M_{11}(5,3) => P(M_{11}) = 34$

Rješavanjem relaksiranih problema za ova dva čvora se dobijaju rješenja $(x_1, x_2) = (4.8, 4)$ i $(x_1, x_2) = (5, 3)$ za gornji odnosno donji dio oblasti, sa kriterijima 36 i 34, respektivno (slika 5.5).



Slika 5.5: Drugo grananje po varijabli x_2.

Kao što se može vidjeti na slici 5.5, moguće je jedino grananje desnog čvora (oblasti P_{LG}) i to po varijabli x_1. Dodaju se dodatna ograničenja po promjenjivoj x_1 za oblast P_{LG} čime se dobijaju sljedeća ograničenja:

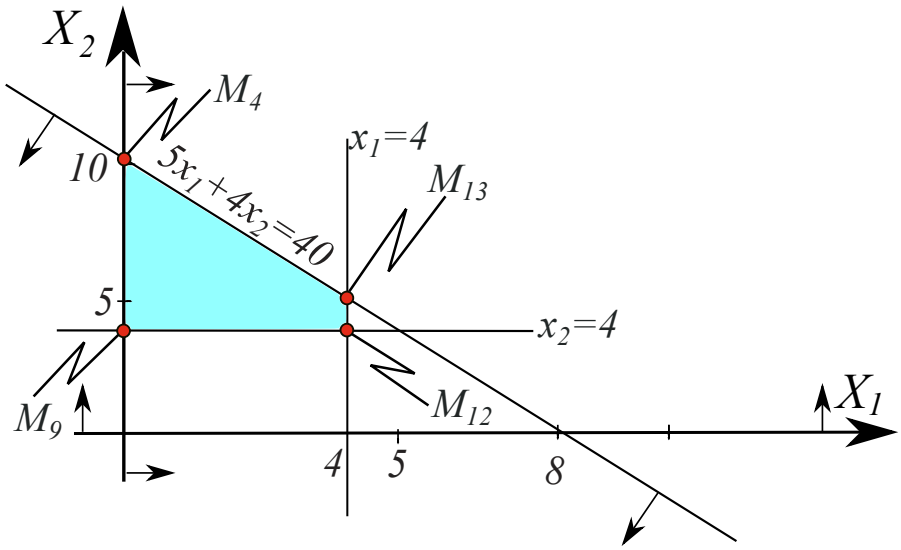
Za oblast P_{LG1}

$$
\begin{gathered}
5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\
3x_1 + x_2 \leq 20, \\
x_1 \geq 0, \\
x_2 \geq 4, \\
x_1 \leq 5, \\
x_1 \geq 5, \\
x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

Za oblast P_{LG2}

$$
\begin{gathered}
5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\
3x_1 + x_2 \leq 20, \\
x_1 \geq 0, \\
x_2 \geq 4, \\
x_1 \leq 4, \\
x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

Očigledno je oblast P_{LG1} prazan skup dok je oblast P_{LG2} predstavljena grafom na slici 5.6.



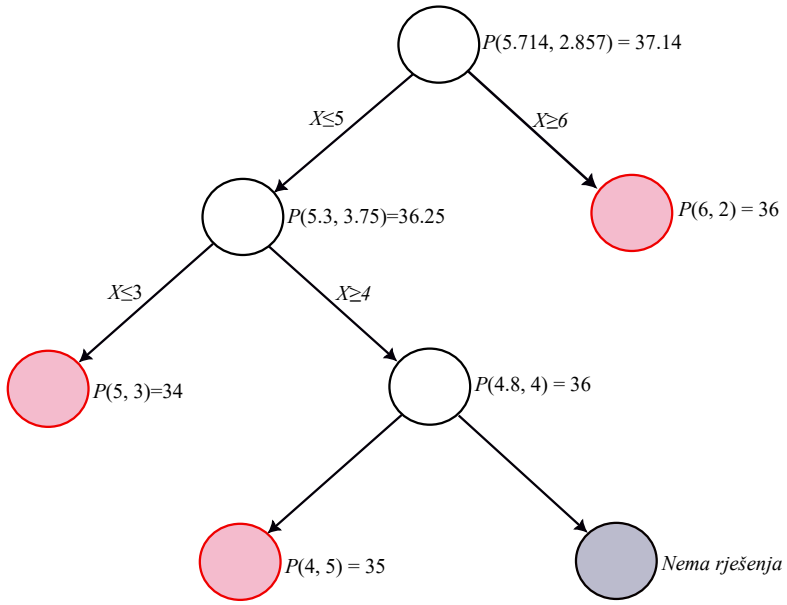
Slika 5.6: Prikaz oblasti pretraživanja za $P(x) = 5x_1 + 3x_2$, uz dodatna ograničenja $x_1 \leq 4$, i $x_2 \geq 4$.

Sada će se odrediti rješenje relaksiranog problema P_{LG2} u kojem egzistiraju vršne tačke M_4, M_9, M_{12} i M_{13}:

$M_4(0, 10) => P(M_4) = 30$
$M_9(0, 4) => P(M_9) = 12$
$M_{12}(4, 4) => P(M_{12}) = 32$
$M_{13}(4, 5) => P(M_{13}) = 35$

Njegovim rješavanjem se dobija da lijevi čvor ima vrijednost $(x_1, x_2) = (4, 5)$, sa kriterijem $P = 35$, dok desni čvor nema rješenje (slika 5.7). Kao

što se može vidjeti na slici 5.7, nema više čvorova po kojima bi se moglo izvršiti grananje, te od svih cjelobrojnih rješenja optimalno rješenje iznosi $(x_1^*, x_2^*) = (6, 2)$, sa vrijednošću kriterija $P^* = 36$.



Slika 5.7: Treće grananje po varijabli x_1.

Također, može se primijetiti sljedeće. Nakon prvog koraka, dobije se rješenje $(x_1, x_2) = (6, 2)$ sa kriterijem $P = 36$ (slika 5.3).

Kada se prelazi na drugi korak, odnosno grananje po varijabli x_2, dobijaju se rješenja $(x_1, x_2) = (4.8, 4)$ i $(x_1, x_2) = (5, 3)$ sa kriterijima 36 i 34.

U ovom slučaju, nije bilo potrebno vršiti daljnje grananje po varijabli x_1. Linearna relaksacija daje vrijednost $P = 36$, što znači da daljnje grananje ne može dati bolju vrijednost od trenutno dobijene.

Iz toga slijedi da je optimalno rješenje već pronađeno i iznosi

$$(x_1^*, x_2^*) = (6, 2), \quad P^* = 36.$$

Zadatak 40.

Neka je dat problem sa tri varijable, x_1, x_2 i x_3, pri čemu je potrebno da varijable x_2 i x_3 budu cjelobrojne. Funkcija kriterija za pronalaženje maksimuma je data sa:

$$P = \max(7x_1 + 9x_2 + 8x_3) \tag{5.11}$$

dok su ograničenja:

$$\begin{gathered} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

Rješenje zadatka 40:

Provodi se ista procedura kao i za prethodni slučaj. Oblast pretraživanja i vršne tačke su predstavljene na slici 5.8.

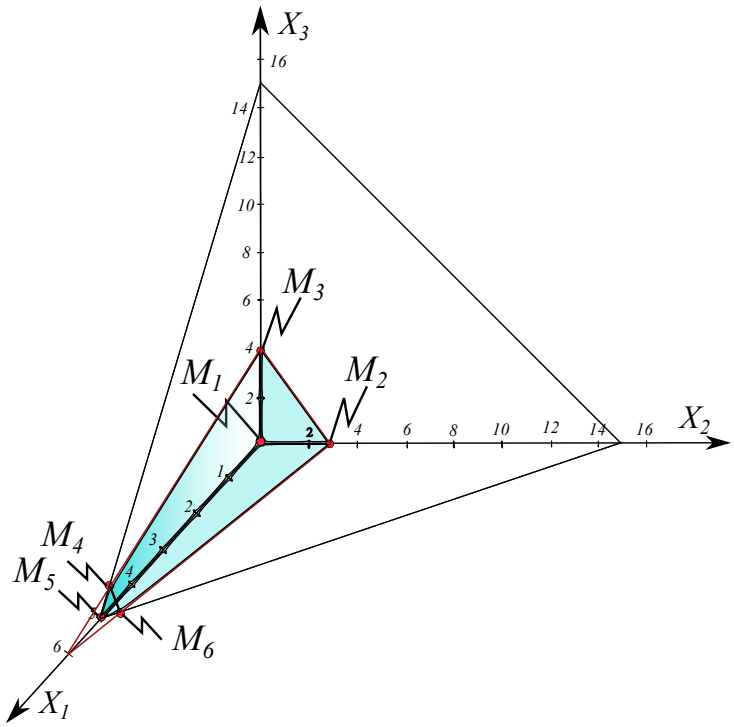
Rješavanjem relaksiranog problema dobijaju se vršne tačke:

$M_1(0,0,0) => P(M_1) = 0$
$M_2(0,2.4,0) => P(M_2) = 21.6$
$M_3(0,0,4) => P(M_3) = 32$
$M_4(4.71,0,0.87) => P(M_4) = 39.96$
$M_5(5,0,0) => P(M_5) = 35$
$M_6(4.84,0.46,0) => P(M_6) = 38.02$

Rješavanjem relaksiranog problema dobija se rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (4.71, 0, 0.87)$ i $P = 39.96$. Može se primijetiti da varijabla x_2 pripada skupu cijelih brojeva, pa se grananje vrši po varijabli x_3, jer po x_1 nema zahtjeva na cjelobrojnost. Kako je $x_3 = 0.87$ dolazi do grananja na $x_3 \leq 0$ i $x_3 \geq 1$, od kojih u obzir dolazi samo $x_3 \geq 1$. Nova oblast pretraživanja je predstavljena na slici 5.9.

Vrijednosti funkcije u novim dobijenim tačkama su:

$M_3(0,0,4) => P(M_3) = 32$
$M_7(0,0.8,0.1) => P(M_7) = 15.2$
$M_8(4.5,0,1) => P(M_8) = 39.5$
$M_9(0,0,1) => P(M_9) = 8$

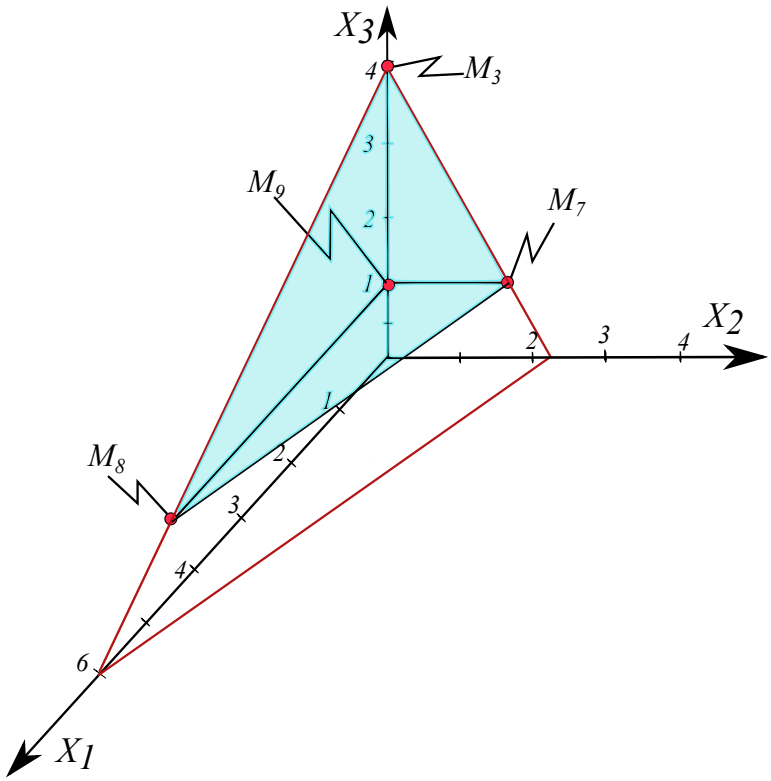


Slika 5.8: Trodimenzionalna oblast pretraživanja za zadatak 40.

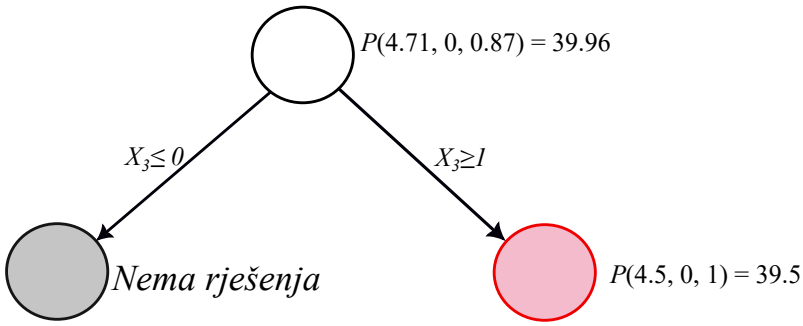
Rješavanjem novodobijenog problema dobija se rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (4.5, 0, 1)$ i $P = 39.5$. Može se primijetiti da obje varijable za koje se traži cjelobrojnost tj. x_2 i x_3 pripadaju skupu cijelih brojeva, pa je problem riješen, jer po x_1 nema zahtjeva na cjelobrojnost. Proces grananja po varijablama je prikazan na slici 5.10.

Dakle, optimalno rješenje je:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (4.5, 0, 1), \qquad P^* = 39.5.$$



Slika 5.9: Trodimenzionalna oblast pretraživanja za zadatak 40 uz dodatni uslov $x_3 \geq 1$.



Slika 5.10: Prvo grananje po varijabli x_3.

5.4 Primjena metoda cjelobrojnog programiranja na mješovite probleme

Cjelobrojno linearno programiranje je problem koji se može predstaviti u obliku:

$$\begin{aligned} P_I &= \max c^T x, \\ Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \\ x_i &\in \mathbb{Z}, \quad i \in I, \end{aligned} \tag{5.12}$$

gdje su $A \in E^{mxn}$, $b \in E^{mx1}$, $c \in E^{nx1}$ i $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. I predstavlja skup koji se sastoji od indeksa varijabli koje su cjelobrojne, dok su n i m broj varijabli i broj ograničenja, respektivno. Matrica A se naziva tehnološkom matricom, vektor b predstavlja vektor slobodnih članova, P_I je funkcija kriterija, pri čemu je c vektor koeficijenata kriterija, a x vektor problemskih varijabli [34]. Varijable x_i, gdje $i \notin I$ pripadaju skupu realnih brojeva. U slučaju da postoje varijable koje su i cjelobrojne i realne, takav problem se naziva problemom mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja. Ukoliko su, pak, sve varijable cjelobrojne, tada se radi o problemu čistog cjelobrojnog linearnog programiranja.

Forma (5.12) se može predstaviti kao skup dozvoljenih vrijednosti:

$$\Omega = \{x \in E^n | Ax \leq b, x \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \textit{ za svako } i \in I\}. \tag{5.13}$$

Ako se zanemare cjelobrojne restrikcije u (5.12), dobija se linearna relaksacija problema:

$$\begin{aligned} P_L &= \max c^T x, \\ Ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Može se primijetiti da vrijedi:

$$P_I \leq P_L, \tag{5.15}$$

odnosno funkcija kriterija za pronalaženje maksimuma problema će, ukoliko postoji rješenje, uvijek imati manju ili jednaku vrijednost u odnosu na funkciju kriterija relaksiranog problema.

Može se zaključiti da metode cjelobrojnog programiranja predstavljaju nezaobilazan alat u modeliranju realnih problema sa diskretnim odlukama, te da *branch and bound* metod, zahvaljujući svojoj fleksibilnosti i efikasnosti, zauzima centralno mjesto u savremenim solverima za optimizaciju.

6

Primjeri optimizacijskih problema u saobraćaju i komunikacijama

SADRŽAJ

6.1 Primjena LP-a za rješavanje transportnog problema 183
6.2 Primjena LP-a za rješavanje problema maksimalnog protoka ... 198
6.3 Primjena LP za traženje minimalnog puta na mreži 203
6.4 Rješavanje Cutting Stock problema metodama LP-a 205
6.5 Rješavanje Knapsack problema korištenjem LP-a 206
6.6 Primjena LP-a za rješavanje problema raspoređivanja 210
6.6.1 Postavka problema raspoređivanja 210
6.6.2 Cjelobrojnost rješenja problema raspoređivanja 215

Primjeri optimizacijskih problema u saobraćaju i komunikacijama obuhvataju različite realne situacije u kojima je potrebno donijeti odluke na temelju ograničenih resursa, vremenskih zahtjeva i kompleksnih operativnih uslova. U ovom poglavlju prikazuju se najčešće vrste problema optimizacije u ovim oblastima, zajedno s njihovim matematičkim modelima i metodama rješavanja.

6.1 Primjena LP-a za rješavanje transportnog problema

Transportni problem predstavlja specijalnu klasu generaliziranih problema protoka. Ovi problemi pripadaju klasi problema linearnog programiranja nastalih kao posljedica formalizacije rješenja problema praktičnog značaja u kojima je bilo potrebno izvršiti optimizaciju vrijednosti neke veličine koja se prenosi kroz grane (*engl. arcs*) koje povezuju različite čvorove (*engl. nodes*). Značenje samih čvorova i grana, te veličine koja se prenosi zavisi od samog problema. Premda teorijski ne postoji ograničenje u pogledu oblasti primjene, u praksi ipak postoje određena ograničenja na strukturu kakvu može imati problem koji se želi modelovati kao transportni.

Klasični transportni problem podrazumijeva pronalaženje optimalnog plana transporta isporuka koje:

- imaju pripadajuća ishodišta za koje se vezuje konačna količina robe za isporuku
- imaju pripadajuća odredišta za koje se vezuje konačna količina robe koja se potražuje
- iskorištavaju ukupnu količinu predviđenu za isporuku, te zadovoljavaju ukupnu količinu koja se potražuje, odnosno skladištena količina mora biti jednaka količini koja se potražuje,

pri čemu je funkcija cijene formulisana kao linearna kombinacija pojedinačnih cijena (troškovi) svake isporuke i količine koja se isporučuje granom pripadajuće cijene [35].

Da bi se došlo do analitičke formulacije problema pretpostavit će se da model transportnog problema ima m ishodišta (skladišta) sa pripadajućim količinama raspoložive robe a_i, $i = 1, ..., m$, n odredišta (potrošača) sa pripadajućim količinama potražnje b_j, $j = 1, ..., n$, te da se za svaku granu koja povezuje ishodište i sa odredištem j vezuje cijena (trošak) transporta c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Nepoznate veličine prema kojima se rješava transportni problem su x_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ i one predstavljaju količinu robe koja se prenosi od ishodišta i do odredišta j. Ovim se funkcija cijene čiji se minimum traži može zapisati kao:

$$\begin{aligned} Z = \min \Big\{ & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \Big\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ograničenja koja se definišu za transportni problem odnose se na ukupnu količinu robe koja se isporučuje iz svakog ishodišta, te ukupnu količinu robe koja biva isporučena svakom odredištu pojedinačno. U klasičnom transportnom problemu ova ograničenja se postavljaju kao jednakosti. Međutim, u nastavku će biti prikazane i druge varijante definisanja ograničenja. Stoga, za svako od m ishodišta postavljaju se ograničenja oblika:

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i \tag{6.2}$$

dok se za svaki od n odredišta postavljaju ograničenja oblika:

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j \tag{6.3}$$

Ono po čemu je klasični transportni problem karakterističan jeste pretpostavljanje prirode vrijednosti pomoću kojih su izraženi a_i, b_j, c_{ij} i x_{ij}, a koje su proizašle iz praktične primjene transportnog problema. Naime, kako a_i i b_j predstavljaju količinu robe koja je raspoloživa za isporuku ili se potražuje respektivno, sasvim je jasno zašto one predstavljaju striktno pozitivne vrijednosti. Slično, količina robe koja biva transportovana x_{ij} se pretpostavlja da je u općem slučaju nenegativna, jer optimalno rješenje ne podrazumijeva da će sve grane biti iskorištene odnosno da može postojati takvo x_{ij} jednako 0. Premda se u literaturi često susreću primjeri kada je cijena, odnosno trošak c_{ij} pozitivna vrijednost, c_{ij} zapravo nema ograničenje u smislu pozitivnosti. Naime, korištenje negativne vrijednosti c_{ij} za funkciju cilja zapravo znači njeno umanjenje odnosno učešće grane negativne vrijednosti cijene znači dobit (primjer u praksi su ugovori između pojedinih proizvođača i kupca). Također, ukoliko je cijena jednaka nuli to znači da ne postoji trošak prilikom transporta od i-tog ishodišta do j-tog odredišta što se može tumačiti npr. kao da se ishodište i odredište nalaze na istoj lokaciji (primjeri u praksi: isporuka u istom gradu kao i proizvodnja, opskrba energijom doma koja se proizvodi pomoću postavljenih solarnih panela povezanih na dom i sl.). Na osnovu prethodno navedenog klasični transportni problem se može obuhvatiti sa sljedećim relacijama:

$$Z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6.4}$$

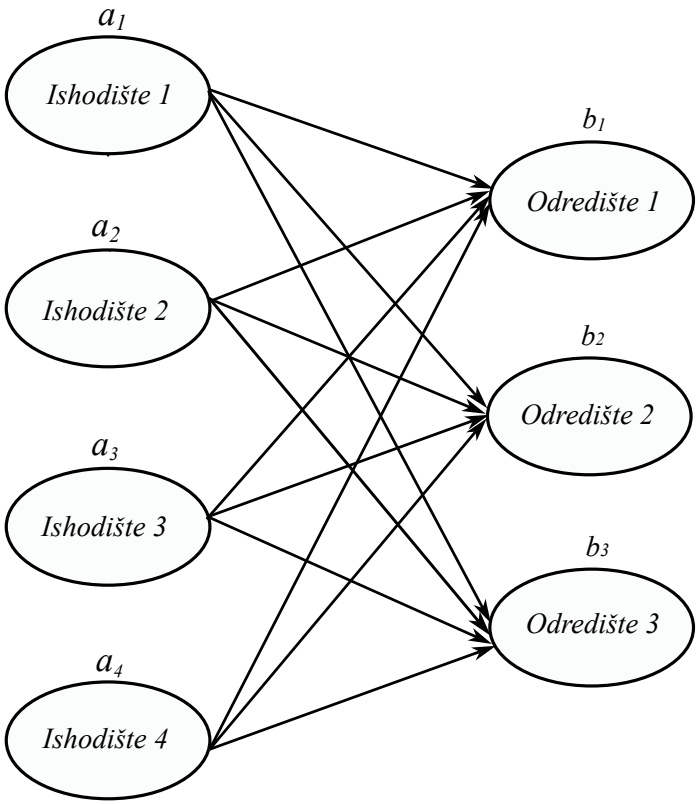
uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$$

Prije nego se navedu ključne karakteristike koje odlikuju klasični transportni problem potrebno je osvrnuti se na pretpostavku o strukturi modela. Naime, prećutno je usvojeno da model klasičnog transportnog problema zapravo predstavlja bikompletan graf (graf čiji čvorovi su podijeljeni u dva skupa takav da grane povezuju svaki čvor jednog skupa sa svakim čvorom drugog skupa). Zapravo, često se u praksi pokazuje da nije svaki dobavljač povezan sa svakim kupcem (npr. nema rute, prevoz nije moguć, ograničenja tržišta), pa se problemi koji imaju sličnost sa transportnim problemom i koji se pokušavaju kao takvi riješiti modeliraju kao bipartitivni grafovi (grafovi gdje nedostaju neke grane). Postoje dva pristupa pomoću kojih se nedostajuće grane mogu predstaviti, odnosno tumačiti. U cilju svođenja polaznog transportnog problema na klasični transportni problem nedostajuće grane se mogu uvesti u model tako što će cijena grane biti beskonačno velika. Naravno, u



Slika 6.1: Primjer modela klasičnog transportnog problema sa 4 ishodišna i 3 odredišna čvora.

praktičnoj realizaciji nije moguće dodijeliti beskonačnu vrijednost, ali se pokazuje da je za dobijanje ispravnog rezultata dovoljno usvojiti cijenu grane nekoliko redova veličine veću od postojećih cijena u modelu. Drugi pristup se vezuje za implementacioni aspekt odnosno programsko rješavanje bilo kreiranjem vlastite implementacije ili korištenjem postojećih solvera. Kako postojanje grane u modelu transportnog problema podrazumijeva uvođenje dodatne promjenljive, svođenjem na klasični transportni problem zapravo se povećava dimenzionalnost prostora problema, dok ograničenja također postaju složenija. Kako je jedna od glavnih mana simpleksnog algoritma tzv. „prokletstvo dimenzionalnosti" ([36]), praktično je lakše implementirati rješenje transportnog problema jednostavnim izostavljanjem nedostajućih grana (što za model znači manji broj varijabli), nego svođenjem polaznog problema na klasični transportni problem. Naravno, ovdje je bitno napomenuti da se time ne narušava samo osobina bikompletnosti modela problema, već ako se razmotre ograničenja, može se primijetiti da se u njima promjenljive javljaju samo dva

puta i to sa koeficijentom 1. Kako je broj ograničenja $n+m$, a broj promjenljivih nm to je koeficijente ograničenja moguće zapisati kao matricu dimenzije $(n+m) \times nm$, a koja će se sastojati samo od 1 i 0. Ovaj karakterističan oblik matrice ograničenja se koristi za razvijanje efikasnijih algoritama.

Prema samoj definiciji klasičnog transportnog problema podrazumijeva se da ukupna količina robe koja je predviđena za isporuku zadovoljava ukupnu količinu robe koja se potražuje s time da se postavlja uslov jednakosti između ovih vrijednosti. Ovaj uslov se naziva još *uslov balansiranosti*, te je dat sa relacijom:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.5}$$

gdje suma na lijevoj strani predstavlja ukupnu količinu robe predviđenu za isporuku, a suma na desnoj strani jednakosti predstavlja ukupnu količinu robe koja se potražuje.

Za praktične probleme uslov balansiranosti predstavlja zahtjev koji često nije moguće zadovoljiti. Moglo bi se reći da značaj optimalnog rješenja najviše dolazi do izražaja kada uslov balansiranosti nije zadovoljen odnosno kada je nebalansirani (otvoreni) transportni problem. Stoga, pronalazak optimalnog rješenja podrazumijeva da čak i kada je gubitak neminovan da i dalje bude što manji odnosno da teži ka očekivanom gubitku. Postoje dvije varijante nebalansiranih problema: kada je ukupna količina robe za isporuku manja od ukupne količine robe koja se potražuje i kada je ukupna količina robe za isporuku veća od količine robe koja se potražuje.

Razmotrit će se prvo slučaj kada nije moguće zadovoljiti ukupnu potražnju robe. Ponovno će se imati pristup svođenja[1] na klasični transportni problem i pristup modeliranja kao općeg problema linearnog programiranja. Za svođenje na klasični transportni model potrebno je uvesti vještački čvor (engl. *dummy node*) čija količina robe za isporuku je jednaka razlici ukupne količine potražnje i ukupne količine isporuke odnosno data je sa relacijom:

$$a_D = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{6.6}$$

Za vještački uveden čvor mora vrijediti da je cijena grane iz ovog čvora prema svakom čvoru odredišta jednaka 0, jer se na ovaj način postiže da, premda je uvedeno novih n varijabli, i dalje one ne učestvuju u funkciji cijene koja se sada može zapisati kao:

$$Z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^{n} c_{Dk} x_{Dk} \tag{6.7}$$
$$uz \quad c_{Dk} = 0, \forall k \in 1, ..., n$$

[1]Svođenje u ovom slučaju podrazumijeva svođenje na oblik koji se lako može unijeti u postojeće solvere, ali na nivou metode rješavanja oba svođenja su ekvivalenta.

Također, novih n uvedenih varijabli x_{Dk} je potrebno sada uključiti i u ograničenja kao:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Dj} = a_D \tag{6.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{Dj} = b_j, j = 1, ..., n$$

Dakle, vidi se da, kao posljedicu uvođenja vještačkog čvora, postoji novo ograničenje po ishodišnom čvoru, te su ograničenja po odredišnim čvorovima modificirana tako što im je dodan član x_{Dj}, te da je tip ograničenja (tip jednakosti) ostao očuvan. Upravo je promjena tipa ograničenja ono što predstavlja drugi pristup modeliranju nebalansiranih transportnih problema. Kako se zna da potražnja neće biti zadovoljena, to će biti dovoljno izmijeniti ograničenja po odredištima na način da se umjesto znaka jednakosti koristiti znak manje ili jednako. Na taj način ograničenja po odredišnim čvorovima postaju:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{Dj} \leq b_j, j = 1, ..., n \tag{6.9}$$

Analogno razmatranje se koristi za modelovanje obrnutog slučaja nebalansiranog transportnog problema (uvođenje vještačkog odredišnog čvora ili promjena znaka jednakosti za ograničenja po ishodištima), a primjer jednog ovakvog slučaja i njegovog rješavanja će biti dat u nastavku ove podsekcije. Bitno je naglasiti da *uslov balansiranosti predstavlja kako potreban, tako i dovoljan uslov za rješavanje transportnog problema* [37]. Kao što je prethodno pokazano, uslov balansiranosti je moguće zadovoljiti i za probleme koji su izvorno nebalansirani odgovarajućim svođenjem, te se može zaključiti da se svaki transportni problem može svesti na balansirani oblik i time učiniti rješivim. Još jedna pogodna osobina transportnih problema jeste da ukoliko su količine robe a_i, $i = 1, ..., m$ i b_j, $j = 1, ..., n$ cijeli brojevi tada će i rezultat, također, biti cijeli broj. Ova osobina je od važnosti, jer cjelobrojni problemi su u općem slučaju teži za rješavanje dok za slučaj transportnog problema zahtjevanje cjelobrojnosti neće učiniti problem kompleksnijim.

Zadatak 41.

Neka je potrebno izvršiti alokaciju određenog proizvoda između potrošača P_1, P_2 i P_3, pri čemu su na raspolaganju tri skladišta S_1, S_2 i S_3.

Potrebe potrošača su:

$$P_1 = 220, \quad P_2 = 180, \quad P_3 = 200 \text{ tona robe.}$$

Na skladištima se nalazi:

$$S_1 = 200, \quad S_2 = 250, \quad S_3 = 150 \text{ tona robe.}$$

Troškovi prevoza između pojedinih potrošača i skladišta prikazani su u tabeli (6.1) .

Tabela 6.1: Transportna tabela: troškovi transporta, ponuda i potražnja.

	P_1	P_2	P_3	**Ponuda**
S_1	20	40	25	200
S_2	30	50	35	250
S_3	25	45	30	150
Potražnja	220	180	200	

Rješenje zadatka 41:

Prvo je potrebno provjeriti da li je problem u zatvorenoj formi:

$$S = 600 = 150 + 250 + 200,$$
$$P = 600 = 200 + 180 + 220,$$
$$\sum_i S_i = \sum_i P_i.$$

Očigledno je da važi jednakost:

$$\sum_i P_i = \sum_i S_i,$$

pa je zadovoljen uslov balansiranosti (zatvorenosti) problema.

Sada se za svaku relaciju *skladište-potrošač* može dodijeliti promjenljiva x_{ij}, koja predstavlja količinu robe koja se šalje iz pojedinog skladišta S_i ka potrošaču P_j. Na ovaj način dobije se sljedeća tabela:

Tabela 6.2: Transportna tabela sa varijablama x_i.

	P_1	P_2	P_3	**Ponuda**
S_1	x_1	x_2	x_3	200
S_2	x_4	x_5	x_6	250
S_3	x_7	x_8	x_9	150
Potražnja	220	180	200	

Sada transport svake količine tereta x_i (cijena transporta koja je naznačena u prvoj tabeli) košta $c_i \cdot x_i$, tako da je funkcija cilja:

$$Z = \min \Big\{ 20x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 50x_5 + 35x_6 + 25x_7 + 45x_8 + 30x_9 \Big\}.$$

Svako skladište dakle treba da obezbijedi robu po slijedećem planu:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 200, \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 250, \\ x_7 + x_8 + x_9 &= 150, \\ x_i \geq 0, &\quad i = 1, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Svaki potrošač dobija robu iz različitih skladišta tako da važi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_7 &= 220, \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 180, \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 200, \\ x_i \geq 0, &\quad i = 1, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Sada je problem preveden u klasičnu formu:

$$\min\{P(x)\} \quad \text{ili} \quad \max\{P(x)\}$$

uz ograničenja:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$A_{\text{eq}}\, x = b_{\text{eq}}.$$

Problem je sada sveden na problem linearnog programiranja. Dalje se problem može riješiti nekom od metoda linearnog programiranja, kako je to detaljno objašnjeno u Poglavlju 4 sa riješenim primjerima.

Ako se sada u zadatku kapacitet skladišta S_1 promijeni na $S_1 = 240$ tada će biti sljedeći slučaj:

	P_1	P_2	P_3	Ponuda
S_1	20	40	25	240
S_2	30	50	35	250
S_3	25	45	30	150
Potražnja	220	180	200	

Očito je sada:

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = 220 + 180 + 200 = 600$$

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 240 + 250 + 150 = 640$$

Očigledno je da uslov balansiranosti (zatvorenosti) problema nije zadovoljen:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i > \sum_{i=1}^{3} P_i$$

Potrebno je izvršiti transformaciju problema na taj način da se doda fiktivni potrošač koji će preuzeti razliku između ponude i potražnje. Transformisani sistem je:

	P_1	P_2	P_3	P_4	Ponuda
S_1	20	40	25	0	240
S_2	30	50	35	0	250
S_3	25	45	30	0	150
Potražnja	220	180	200	40	

Sada se za svaku relaciju skladište - potrošač može dodijeliti promjenljiva x_i koja će predstavljati količinu robe koja se šalje iz pojedinog skladišta ka pripadajućem potrošaču. Na ovaj način se dobije sljedeća tabela:

	P_1	P_2	P_3	P_4	Ponuda
S_1	x_1	x_2	x_3	x_4	240
S_2	x_5	x_6	x_7	x_8	250
S_3	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	150
Potražnja	220	180	200	40	

Sada je:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 240 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 250 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &= 150 \\ x_1 + x_5 + x_9 &= 220 \qquad x_i \geq 0 \\ x_2 + x_6 + x_{10} &= 180 \\ x_3 + x_7 + x_{11} &= 200 \\ x_4 + x_8 + x_{12} &= 40 \end{aligned}$$

Sada je proširena funkcija cilja:

$$P = \min\{\ 20x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 0x_4 + 30x_5 + 50x_6 + 35x_7 \\ + 0x_8 + 25x_9 + 45x_{10} + 30x_{11} + 0x_{12}\ \}$$

Po izvršenju algoritma x_4,x_8 i x_{12} predstavljaju količinu robe koja će ostati neraspoređena u pojedinim skladištima uz zadovoljavanje trenutne tražnje, pri minimiziranim troškovima.

Ako se sada u zadatku potražnja potrošača P_1 poveća na $P_1 = 260$ tada će biti sljedeći slučaj:

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = 260 + 180 + 200 = 640$$

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 200 + 250 + 150 = 600$$

Očigledno je da uslov balansiranosti (zatvorenosti) problema nije zadovoljen:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i < \sum_{i=1}^{3} P_i$$

Potrebno je izvršiti transformaciju problema na taj način da se doda fiktivno skladište koje će nadoknaditi razliku između ponude i potražnje. Transformisani sistem je:

	P_1	P_2	P_3	Ponuda
S_1	20	40	25	200
S_2	30	50	35	250
S_3	25	45	30	150
S_4 (fikt.)	0	0	0	40
Potražnja	260	180	200	

Sada se za svaku relaciju skladište–potrošač može dodijeliti promjenljiva x_i koja će predstavljati količinu robe koja se šalje iz pojedinog skladišta ka pripadajućem potrošaču. Na ovaj način se dobije sljedeća tabela:

	P_1	P_2	P_3	Ponuda
S_1	x_1	x_2	x_3	200
S_2	x_4	x_5	x_6	250
S_3	x_7	x_8	x_9	150
S_4	x_{10}	x_{11}	x_{12}	40
Potražnja	260	180	200	

Ograničenja su sljedeća:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 200,\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 250,\\
x_7 + x_8 + x_9 &= 150,\\
x_{10} + x_{11} + x_{12} &= 40,\\
x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} &= 260,\\
x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} &= 180,\\
x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} &= 200,\\
x_i \geq 0, \quad i &= 1, \ldots, 12.
\end{aligned}
$$

Funkcija cilja je:

$$
\begin{aligned}
P = \min\{\ & 20x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 50x_5 + 35x_6\\
& + 25x_7 + 45x_8 + 30x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12}\ \}.
\end{aligned}
$$

Varijable x_{10}, x_{11}, x_{12} predstavljaju količinu robe koja će se „dopremiti” iz fiktivnog skladišta S_4 kako bi se zadovoljila povećana potražnja potrošača P_1. Dalje se postupak izračuna vrši nekom od pomenutih metoda.

Iako se transportni problem najčešće rješava metodama specijalizovanim za LP, on se takođe može riješiti i generalnim tehnikama linearnog programiranja. Primjena metoda vršnih tačaka (ili pretraživanja vršnih tačaka) omogućava ilustraciju koncepta optimizacije: rješenje se nalazi u jednoj od vršnih tačaka dozvoljene oblasti, a kretanje po rubovima ili rebrima poliedra vodi do identifikacije optimuma.

Ovakav pristup je posebno koristan kada se želi prikazati geometrijski ili vizualni način nalaženja optimalnog rješenja, kao i kod edukativnih primjera sa malim brojem varijabli, dok se u stvarnim transportnim problemima s velikim brojem skladišta i potrošača primjenjuju računarske metode LP optimizacije.

Primjer ovakvog pristupa biće dat u narednom zadatku, gdje se optimalan broj vozila različitih tipova određuje metodom vršnih tačaka i metodom rebrenih varijacija, pokazujući kako se linearno programiranje može primijeniti i u logistici transporta tereta.

Zadatak 42.

Logistička kompanija treba svakodnevno osigurati dvije vrste tereta: osnovni teret sa 11 jedinica i specijalni teret sa 14 jedinica.

Teret se isporučuje korištenjem tri tipa vozila:

- Vozilo A (T1) – cijena po isporuci: 8 KM
- Vozilo B (T2) – cijena po isporuci: 12 KM
- Vozilo C (T3) – cijena po isporuci: 14 KM

Kapaciteti vozila po tipu tereta su:

Vozilo	Osnovni teret	Specijalni teret
$A(T1)$	3	1
$B(T2)$	2	2
$C(T3)$	0.5	3

Zadatak je odrediti optimalan broj vozila svakog tipa kako bi bile zadovoljene minimalne dnevne potrebe za oba tipa tereta uz minimalni ukupni trošak.

Rješenje zadatka 42:

Prvo se definišu oblast pretraživanja i funkcija cilja.
Promjenljive ovog problema su:

x_1 = broj vozila tipa A (T1) angažovanih dnevno

x_2 = broj vozila tipa B (T2) angažovanih dnevno

x_3 = broj vozila tipa C (T3) angažovanih dnevno

Funkcija cilja je minimizirati trošak:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 12x_2 + 14x_3$$

Ograničenja su:
Dnevna potreba za osnovnim teretom:

$$3x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 \geq 11$$

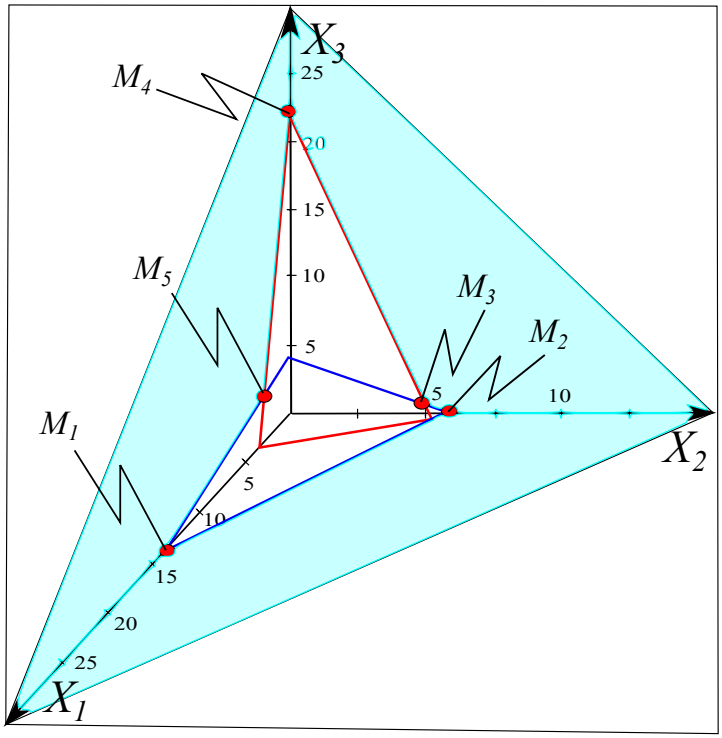
Dnevna potreba za specijalnim teretom:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 14$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Ovo predstavlja standardni linearni program logističkog tipa. Potrebno je

pronaći vršne tačke i zatim odabrati optimalno rješenje metodom pretraživanja vršnih tačaka i metodom rebrenih varijacija. Oblast pretraživanja je prikazana na slici 6.2.



Slika 6.2: Traženje optimuma metodom pretraživanja vršnih tačaka za funkciju $f(x) = 8x_1 + 12x_2 + 14x_3$.

Koordinate vršnih tačaka oblasti pretraživanja su:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (14, 0, 0),\\
M_2 &= (0, 7, 0),\\
M_3 &= (0, 5.2, 1.2),\\
M_4 &= (0, 0, 22),\\
M_5 &= (3.06, 0, 3.67)
\end{aligned}
$$

Vrijednosti funkcije cilja $f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 12x_2 + 14x_3$ u vršnim tač-

kama su:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (14, 0, 0), & f(M_1) &= 8 \cdot 14 + 12 \cdot 0 + 14 \cdot 0 = 112 \\
M_2 &= (0, 7, 0), & f(M_2) &= 8 \cdot 0 + 12 \cdot 7 + 14 \cdot 0 = 84 \\
M_3 &= (0, 5.2, 1.2), & f(M_3) &= 8 \cdot 0 + 12 \cdot 5.2 + 14 \cdot 1.2 = 79.2 \\
M_4 &= (0, 0, 22), & f(M_4) &= 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 14 \cdot 22 = 308 \\
M_5 &= (3.06, 0, 3.67), & f(M_5) &= 8 \cdot 3.06 + 12 \cdot 0 + 14 \cdot 3.67 \approx 75.86
\end{aligned}
$$

Najmanja vrijednost funkcije cilja je:

$$f_{\min} = 75.86 \quad \text{pri } M_5 = (3.06, 0, 3.67)$$

U nastavku provjera zadatka metodom rebrenih varijacija.

<u>*1. korak*</u>: za početnu tačku se uzima $x^0 = M_2 = \{0, 7, 0\}$. Moguća su tri smjera kretanja iz tačke M_2, a to su:

I) $M_2 = \{0, 7, 0\} \to M_1 = \{14, 0, 0\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^0 = \{14, -7, 0\}$, stoga je $\Delta f_1^0 = 8 \cdot 14 + 12 \cdot (-7) + 14 \cdot (0) = 28$

II) $M_2 = \{0, 7, 0\} \to M_3 = \{0, 5.2, 1.2\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^0 = \{0, -1.8, 1.2\}$, stoga je $\Delta f_1^0 = 8 \cdot 0 + 12 \cdot (-1.8) + 14 \cdot (1.2) = -4.8$

III) $M_2 = \{0, 7, 0\} \to M_5 = \{3.06, 0, 3.67\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^0 = \{3.06, -7, 3.67\}$, stoga je $\Delta f_1^0 = 8 \cdot 3.06 + 12 \cdot (-7) + 14 \cdot (3.67) = -8.14$

$$\min\{\Delta f(x^0)\} = -8.14$$

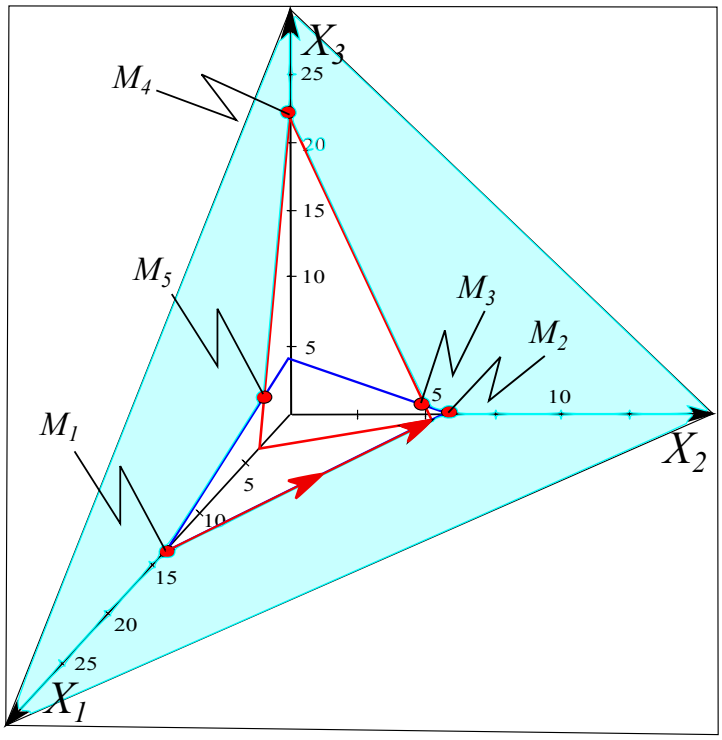
<u>*2. korak*</u>: za sljedeću početnu tačku se uzima $x^1 = M_5 = \{3.06, 0, 3.67\}$. Mogući smjer kretanja iz tačke M_5 (ne vraćajući se nazad) je samo prema M_4:

I) $M_5 = \{3.06, 0, 3.67\} \to M_4 = \{0, 0, 22\}$ u ovom slučaju je $\Delta M_1^1 = \{-3.06, 0, 18.33\}$, stoga je $\Delta f_1^1 = 8 \cdot (-3.06) + 12 \cdot 0 + 14 \cdot (18.33) = 232.14$

Budući da se traži minimum funkcije, za ovaj slučaj je prijelaz pozitivan, odnosno $\Delta f(x^1) > 0$, dostignut je optimum funkcije u tački $M_5 = \{3.06, 0, 3.67\}$, tj.:

$$x^* = x^1 = M_5 = \{3.06, 0, 3.67\}$$
$$f^* = f(M_2) + \Delta f(x^0) = 84 - 8.14 = 75.86$$

Kretanje po rebrima dozvoljene oblasti pretraživanja je ilustrirano slikom 6.3.



Slika 6.3: Traženje optimuma metodom rebrenih varijacija ($M_1 \to M_2$) za funkciju $f(x) = 8x_1 + 12x_2 + 14x_3$.

Napomena: U ovom primjeru problem je posmatran kao kontinuirani linearni program, pa rješenje ne nameće zahtjev cjelobrojnosti broja vozila. U slučaju da se zahtijeva cjelobrojno rješenje, problem bi se morao formulirati kao cjelobrojni linearni program.

6.2 Primjena LP-a za rješavanje problema maksimalnog protoka

Mnogi problemi matematičkog programiranja se mogu modelirati jezikom teorije grafova. Međutim, vrijedi i obratno, veliki broj problema teorije grafova se može prikazati kao modeli matematičkog programiranja, a često i kao modeli linearnog programiranja. Jedan od prvih problema tog tipa, koji je uspješno riješen metodama teorije grafova, koji također predstavlja specijalan slučaj problema linearnog programiranja je takozvani *problem maksimalnog protoka*.

Zadatak nalaženja maksimalnog protoka se najčešće susreće u raznim tipovima realnih transportnih zadataka. Na primjer, ako je iz jednog grada (početna tačka grafa) za određeno vrijeme potrebno prebaciti što više putnika u drugi grad (krajnja tačka grafa) mrežom avionskog saobraćaja, dobija se upravo zadatak maksimalnog protoka. Podrazumijeva se da svaka relacija avionskog saobraćaja ima svoju propusnu sposobnost, tj. gornju granicu tereta koji se može po njoj prevesti za određeno vrijeme. Pri tome se pretpostavlja da se putnici ne mogu ni ukrcavati ni iskrcavati u međustanicama, inače se zadatak usložnjava. Pored ovoga, postoje mnogobrojni primjeri šta u realnim primjenama mogu biti mreže, čvorovi grane i protoci. Naprimjer, u komunikacijskim mrežama čvorovi su računari i sateliti, grane su kablovi i optička vlakna, a protoci audio ili video paketi. U električnim kolima čvorovi su registri i sabirnice, grane žice, a protok struja. U hidrauličkim sistemima čvorovi su rezervoari i pumpe, grane cijevi, a protoci fluidi. U finansijskim mrežama čvorove predstavljaju dionice i valute, grane transakcije, a protok novac. U transportnim mrežama čvorovi su aerodromi i stanice, grane autoputevi i pruge, a protoci putnici ili teret.

Da bi se problem maksimalnog protoka predstavio kao problem linearnog programiranja potrebno je[5]:

- odrediti varijable koje će predstavljati protok za svaku od grana grafa
- predstaviti ograničenja problema maksimalnog protoka kao balansna i prirodna ograničenja
- dodati zamišljenu granu u graf koja spaja izvor i ponor koja će označavati ukupni protok
- kriterij problema će nam biti ukupni protok, dakle ta zamišljena grana koja spaja izvor i ponor

Varijable problema linearnog programiranja su protoci kroz odgovarajuće grane grafa. Te varijable se označavaju sa x_{ij}, gdje je i izlazni čvor, a j ulazni čvor grane usmjerenog grafa.

Ograničenja kapaciteta se predstavljaju kao:

$$x_{ij} \leq c_{ij} \tag{6.10}$$

gdje je:

c_{ij} kapacitet grane od čvora i do čvora j.

Naravno podrazumijeva se da prirodna ograničenja problema linearnog programiranja budu ispunjena, tj. svi protoci su veći ili jednaki nuli, što je intuitivno jasno.

Ograničenja ulaznog i izlaznog protoka za čvorove (osim izvora i ponora) predstavljaju se kao:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}, \tag{6.11}$$

gdje se suma s lijeve strane odnosi na sve grane koje izlaze iz čvora i, a suma s desne strane na sve grane koje ulaze u čvor i.

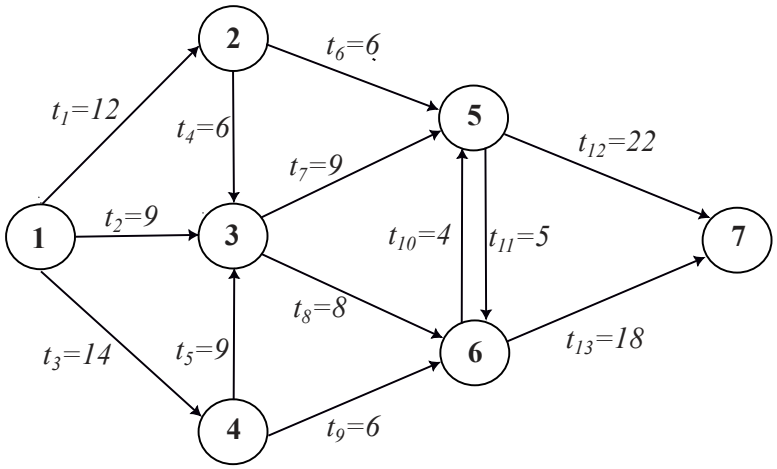
Kriterij funkcije cilja se može svesti na to da se maksimizira protok iz izvora, jer ukupni protok ne može biti veći od toga. Na sličan način se definiše i njegov dual, problem minimalnog reza kao problem linearnog programiranja.

Proračun maksimalnog protoka limitiran je, pored tehničkih ograničenja veznih linija, maksimalnim iznosom robe koja se može poslati iz početnog čvora ili količinom robe koju može primiti krajnji čvor.

Zadatak 43.

Za mrežu na slici 6.4 je potrebno naći maksimalan protok robe koja se može poslati od čvora 1 ka čvoru 7. Potrebno je napisati jednačine koje problem svode na problem linearnog programiranja.

Rješenje zadatka 43:



Slika 6.4: Mreža čvorova - zadatak 43.

Kod ovakvog tipa zadataka potrebno je izvršiti proračun koji maksimalan iznos robe je moguće transportovati od nekog početnog (čvor 1) ka krajnjem čvoru (čvor 7). Proračun maksimalnog protoka limitiran je, pored tehničkih ograničenja, maksimalnim iznosom robe koja se može poslati iz početnog čvora ili količinom robe koju može primiti krajnji čvor, pa je tako funkcija cilja:

$$\max\{t_1 + t_2 + t_3\}$$

ili

$$\max\{t_{12} + t_{13}\}.$$

Za ostale čvorove (izuzimajući prvi i krajnji) važe balansni uslovi:

Balansni uslovi za čvor 2: $t_1 = t_4 + t_6$
Balansni uslovi za čvor 3: $t_2 + t_4 + t_5 = t_7 + t_8$
Balansni uslovi za čvor 4: $t_3 = t_5 + t_9$
Balansni uslovi za čvor 5: $t_6 + t_7 + t_{11} = t_{10} + t_{12}$
Balansni uslovi za čvor 6: $t_8 + t_9 + t_{10} = t_{11} + t_{12}$

Pored balansnih uslova za svaki od lukova važi i ograničenja o maksimalno dozvoljenom teretu koji se može transportovati preko pojedine poveznice tako imamo:

$$
\begin{aligned}
0 \le t_1 \le 12 \\
0 \le t_2 \le 9 \\
0 \le t_3 \le 14 \\
0 \le t_4 \le 6 \\
0 \le t_5 \le 9 \\
0 \le t_6 \le 6 \\
0 \le t_7 \le 9 \\
0 \le t_8 \le 8 \\
0 \le t_9 \le 6 \\
0 \le t_{10} \le 4 \\
0 \le t_{11} \le 5 \\
0 \le t_{12} \le 22 \\
0 \le t_{13} \le 18
\end{aligned}
$$

Dakle, problem je sveden na klasičan problem linearnog programiranja $maxP(x)$ uz ograničenja:

$$
\begin{aligned}
Ax &\le b \\
A_{\text{eq}}x &= b_{\text{eq}} \\
x &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Problem određivanja maksimalnog protoka robe od početnog čvora (čvor 1) do krajnjeg čvora (čvor 7) riješen je primjenom metode linearnog programiranja u softverskom paketu MATLAB. Cilj je maksimizirati ukupnu količinu robe koja može proći kroz mrežu, uz poštovanje balansnih uslova u čvorovima i kapaciteta pojedinih lukova.

Dobijeno je sljedeće optimalno rješenje protoka po lukovima:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 12.0 \\
t_2 &= 9.0 \\
t_3 &= 14.0 \\
t_4 &= 3.0 \\
t_5 &= 4.5 \\
t_6 &= 3.0 \\
t_7 &= 4.5 \\
t_8 &= 4.0 \\
t_9 &= 3.0 \\
t_{10} &= 2.0 \\
t_{11} &= 2.5 \\
t_{12} &= 11.0 \\
t_{13} &= 9.0
\end{aligned}
$$

Iz rješenja se vidi da su balansni uslovi u svim čvorovima zadovoljeni, a da su kapaciteti lukova poštovani.

Maksimalna količina robe koja se može transportovati kroz mrežu iznosi:

$$P_{\max} = 35.$$

Dobijeno rješenje predstavlja maksimalni protok od početnog do krajnjeg čvora, uz poštovanje svih ograničenja mreže.

6.3 Primjena LP za traženje minimalnog puta na mreži

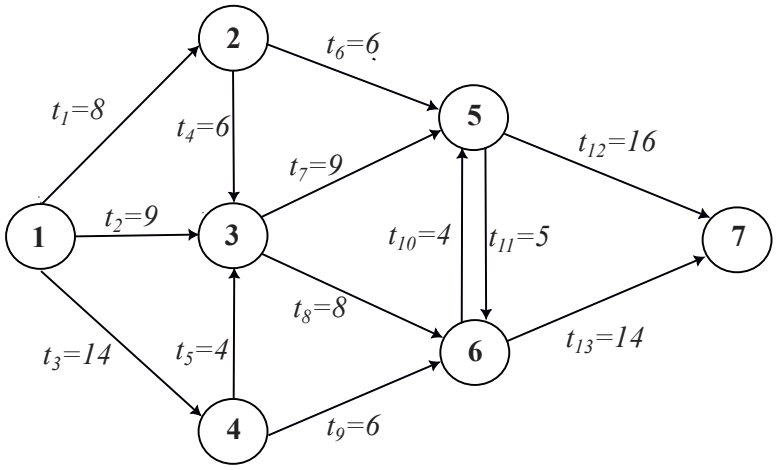
Za rješavanje zadataka kod kojih se traži minimalan ili maksimalan put na mreži od nekog polaznog do nekog krajnjeg čvora, mreža se transformiše na način da se svakoj varijabli rastojanja dodijeli njoj pripadajuća varijabla.

U telekomunikacijama, problemi određivanja minimalnog puta, poput prikazanog u zadatku, često se pojavljuju kod rutiranja IP paketa u mrežama. Minimalni put omogućava optimizaciju kašnjenja, gubitaka paketa i opterećenja linkova, čime se postiže efikasnije korištenje resursa mreže. Slični modeli koriste se i u planiranju optimiziranih ruta za prenos podataka u optičkim i mobilnim mrežama, kod multicast rutiranja ili pri određivanju ruta u MPLS (Multiprotocol Label Switching) mrežama, gdje je cilj minimizirati ukupne troškove ili vrijeme prijenosa podataka između izvora i odredišta.

Zadatak 44.

Za mrežu na slici 6.5 je potrebno naći minimalan put od čvora 1 ka čvoru 7. Potrebno je napisati jednačine koje problem određivanja minimalnog puta svode na problem linearnog programiranja.

Rješenje zadatka 44:



Slika 6.5: Mreža sa čvorovima i težinama grana t_i.

U zadatku je potrebno proračunati najkraći put od početnog čvora (čvor 1) do krajnjeg čvora (čvor 7). Po analogiji sa očuvanjem energije važe balansni

uslovi za svaki od čvorova, s tim da se za ulaz početnog čvora uzima vrijednost 1, isto vrijedi i za krajnji čvor kod kojeg se uzima izlazna vrijednost 1.

Shodno rečenom, jednačine čvorova su:

$$\begin{aligned}
&\text{Čvor 1:} && t_1 + t_2 + t_3 = 1 \\
&\text{Čvor 2:} && t_1 = t_4 + t_6 \\
&\text{Čvor 3:} && t_2 + t_4 + t_5 = t_7 + t_8 \\
&\text{Čvor 4:} && t_3 = t_5 + t_9 \\
&\text{Čvor 5:} && t_6 + t_7 + t_{10} = t_{11} + t_{12} \\
&\text{Čvor 6:} && t_8 + t_9 + t_{11} = t_{10} + t_{13} \\
&\text{Čvor 7:} && t_{12} + t_{13} = 1
\end{aligned}$$

Funkcija cilja (ukupna duljina puta) može se zapisati kao:

$$P(x) = \min \sum_{i=1}^{13} c_i \, t_i$$

gdje su koeficijenti c_i jednaki:

$$(c_1, \ldots, c_{13}) = (8, 9, 14, 6, 4, 6, 9, 8, 6, 4, 5, 16, 14).$$

Problem je sveden na oblik:

$$A_{\text{eq}} \, x = b_{\text{eq}},$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Vidi se da je problem sveden na oblik linearnog programiranja i može se primjeniti neka od navedenih metoda.

Problem je riješen primjenom metode linearnog programiranja korištenjem MATLAB funkcije `linprog`.

Dobijeno je sljedeće optimalno rješenje:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_{13}) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0).$$

Iz rješenja se vidi da su aktivne varijable t_1, t_6 i t_{12}, dok su sve ostale varijable jednake nuli. To znači da najkraći put u mreži prolazi upravo kroz odgovarajuće grane.

Minimalna ukupna dužina puta iznosi:

$$P_{\min} = 30.$$

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da je pronađen optimalan put od čvora 1 do čvora 7 minimalne dužine 30, čime je zadatak u potpunosti riješen.

6.4 Rješavanje Cutting Stock problema metodama LP-a

Problem rezanja zaliha (eng. *cutting stock problem*) je prvi formulisao L. V. Kantorovich 1939. godine, te je od tada zanimljiva tematika u oblasti operacionih istraživanja, posebno zbog svoje direktne primjene u raznim industrijama koje se bave proizvodnjom materijala, kao što su papir, metal i drugi materijali.

Ovaj problem se može klasifikovati po svojoj dimenzionalnosti na tri kategorije:

- jednodimenzionalni,
- dvodimenzionalni,
- trodimenzionalni.

Za oblast saobraćaja interesantni su trodimenzionalni problemi. Trodimenzionalni optimizacijski problemi imaju značajnu primjenu u oblasti saobraćaja, posebno u transportnoj industriji, gdje je potrebno optimalno upakovati različite proizvode u ograničen trodimenzionalni prostor. U praksi se ovi problemi najčešće ne rješavaju direktno kao problemi rezanja zaliha, već kao problemi pakovanja, pri čemu su oba pristupa matematički ekvivalentna [6].

Prije prikaza matematičkog modela potrebno je uvesti osnovne elemente najčešće korištene formulacije.

Obrazac rezanja predstavlja jedan mogući raspored komada različitih dužina unutar standardnog komada dužine B. Varijabla x_i označava broj korištenja obrasca i, dok koeficijent a_{ij} predstavlja broj komada dužine w_j koji se pojavljuju u obrascu i. Parametar c_i određuje trošak upotrebe obrasca i, odnosno potrošnju jednog standardnog komada. Na ovaj način model direktno povezuje potražnju za komadima dužine w_j sa načinom njihovog dobijanja iz standardnog materijala.

Problem rezanja zaliha može se formalizovati na sljedeći način. Pretpostavimo da postoji m narudžbi za proizvode dužina w_i $(i = 1, \ldots, m)$, pri čemu se za svaku dužinu zahtijeva q_i jedinica. Svaki proizvod se dobija rezanjem standardnog komada dužine B, gdje vrijedi:

$$0 \leq w_i \leq B. \tag{6.12}$$

Cilj je odrediti minimalan broj standardnih komada potrebnih da bi se zadovoljila ukupna narudžba od $\sum_{i=1}^{m} q_i$ proizvoda.

Matematička formulacija problema rezanja zaliha glasi:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq q_j, \quad \forall j = 1, \ldots, n, \\ & x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Iako se izvorno odnosi na rezanje fizičkog materijala, ista formulacija se koristi i u optimizaciji mrežnih resursa, gdje je cilj efikasno rasporediti kapacitete kanala, buffera ili raspoloživog bandwidtha kako bi se smanjili gubici i povećala ukupna efikasnost sistema.

6.5 Rješavanje Knapsack problema korištenjem LP-a

Neki problemi koji se mogu predstaviti modelima cjelobrojnog linearnog programiranja su veoma dobro proučeni, zbog njihove velike praktične važnosti. Među njima jedan od najznačajnijih je tzv. problem ranca (ili ruksaka) (Knapsack Problem). Knapsack problem predstavlja tipičan problem kombinatorne optimizacije. Postoje brojne varijante problema ranca, od kojih su najčešće:

- 0–1 problem ranca (0–1 Knapsack Problem),
- ograničeni problem ranca (Bounded Knapsack Problem),
- neograničeni problem ranca (Unbounded Knapsack Problem),
- problem sume podskupa (Subset-Sum Knapsack Problem),
- problem usitnjavanja novca (Change-Making Knapsack Problem),
- 0–1 problem više ranaca (0–1 Multiple Knapsack Problem),
- generalizirani problem raspodjele (Generalized Assignment Problem),
- problem pakovanja (Bin Packing Problem).

Ove varijante Knapsack problema omogućuju modeliranje različitih situacija u logistici, pakovanju, planiranju resursa i optimizaciji kapaciteta, ovisno o tome da li je broj predmeta ograničen, neograničen ili djeljiv.

Prije prikaza matematičkog modela potrebno je definisati osnovne elemente formulacije. Neka je dat ranac zapremine $W \geq 0$ i skup predmeta kojima se ranac puni.

Svaki predmet vrste i ($i = 1, \ldots, n$) ima:

- težinu (ili zapreminu) w_i,
- vrijednost c_i,
- ukupno t_i komada dostupno u skladištu.

Neka se varijabla x_i definiše kao broj predmeta vrste i koji se stavlja u ranac. Cilj je maksimizirati ukupnu vrijednost predmeta u rancu, uz poštivanje kapaciteta ranca i ograničenja dostupnosti predmeta.

Osnovni (ograničeni) Knapsack problem

Matematički model ograničenog problema ranca glasi:

$$\begin{aligned} \max \quad & P = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\ & 0 \leq x_i \leq t_i, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.14}$$

0–1 Knapsack problem

Ako je $t_i = 1$ za sve i, svaka varijabla x_i može biti samo 0 ili 1, pa model postaje:

$$\begin{aligned} \max \quad & P = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Otvoreni problem ranca pretpostavlja neograničenu dostupnost predmeta ($x_i \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} \max \quad & P = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\ & x_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Zatvoreni problem ranca pretpostavlja ograničenu dostupnost predmeta (b_i komada vrste i):

$$\begin{aligned} \max \quad & P = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\ & x_i \in \{0, 1, \ldots, b_i\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ako je moguće dijeliti neki predmet na dijelove, ograničenje prelazi u:

$$x_i \in \mathbb{Q}^+, \quad b_i > 0.$$

Linearno programiranje i relaksacija

Ako se zanemari uslov cjelobrojnosti, dobija se problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \max \quad & P = c^T x \\ \text{uz ograničenja:} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{6.18}$$

koji se može riješiti standardnim metodama LP.

Zadatak 45.

U kontejner poznate zapremine $15\,\mathrm{m}^3$ treba smjestiti što više primjeraka pet različitih predmeta poznate zapremine. Zapremine i cijene po komadu predstavljene su u tabeli 6.3.

Rješenje zadatka 45:

Tabela 6.3: Podaci o kontejneru i proizvodima - zadatak.

Predmet	**Cijena**	**Zapremina**
A	5	5
B	3	4
C	6	7
D	6	6
E	2	2

Neka se sa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 označi broj komada svakog od predmeta A, B, C, D, E koji treba staviti u kontejner tako da ukupni prihod bude maksimalan. Odgovarajući ILP (Integer Linear Programming) problem se zapisuje kao:

$$maxP = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

uz ograničenje:

$$\begin{aligned} &5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 15 \\ &x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Optimalno rješenje je: $x_1 = 3.0,\ x_2 = 0.0,\ x_3 = 0.0,\ x_4 = 0.0,\ x_5 = 0.0$, što znači da je rješenje ovog problema:

$$x^* = (3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

a vrijednost funkcije cilja

$$P^* = 15.$$

Specijalno, može se promatrati problem ranca kod kojega je $x_i \in \{0, 1\}$. To znači da se u kontejner stavlja po jedan primjerak od samo nekih predmeta, tako da ukupni prihod bude maksimalan. U tom slučaju se govori o *0–1 programiranju*.

Prethodni primjer tada bi mogli predstaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \max\ P = {} & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 15, \\ & x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1,\ x_3 \leq 1,\ x_4 \leq 1,\ x_5 \leq 1, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Primjenom neke od metoda linearnog programiranja dobije se rješenje:

$$x_R^* = \left(1, 0, \tfrac{2}{7}, 1, 1\right), \quad P_R^* = 14.714.$$

Zaokruživanjem prema dolje se dobije:

$$x^* = (1, 0, 0, 1, 1), \quad P^* = 13,$$

i to je 0–1 rješenje ovog problema.

U ovom slučaju je uklonjeno ograničenje cjelobrojnosti (relaksacija odgovarajućeg problema cjelobrojnog linearnog programiranja).

Knapsack problemi se susreću u različitim oblastima poput logistike, transporta, saobraćaja, telekomunikacija, planiranja proizvodnje, alokacije resursa, optimizacije skladištenja, gdje služe za efikasnu raspodjelu ograničenih resursa radi maksimiziranja cilja poput profita, kapaciteta ili performansi sistema.

6.6 Primjena LP-a za rješavanje problema raspoređivanja

Problem raspoređivanja je veoma značajan problem i po postavci spada u oblast kombinatorne optimizacije. Međutim, može se pokazati da je problem raspoređivanja zapravo specijalan slučaj linearnog programiranja, tako da se za njegovo rješavanje mogu koristiti razvijene metode linearnog programiranja. Tako se npr. za rješavanje ovog problema može koristiti simpleks metoda. Postoje različiti tipovi problema raspoređivanja, a neki od njih su [30]:

- linearni problemi raspoređivanja,
- kvadratni problemi raspoređivanja i
- problemi raspoređivanja sa više indeksa.

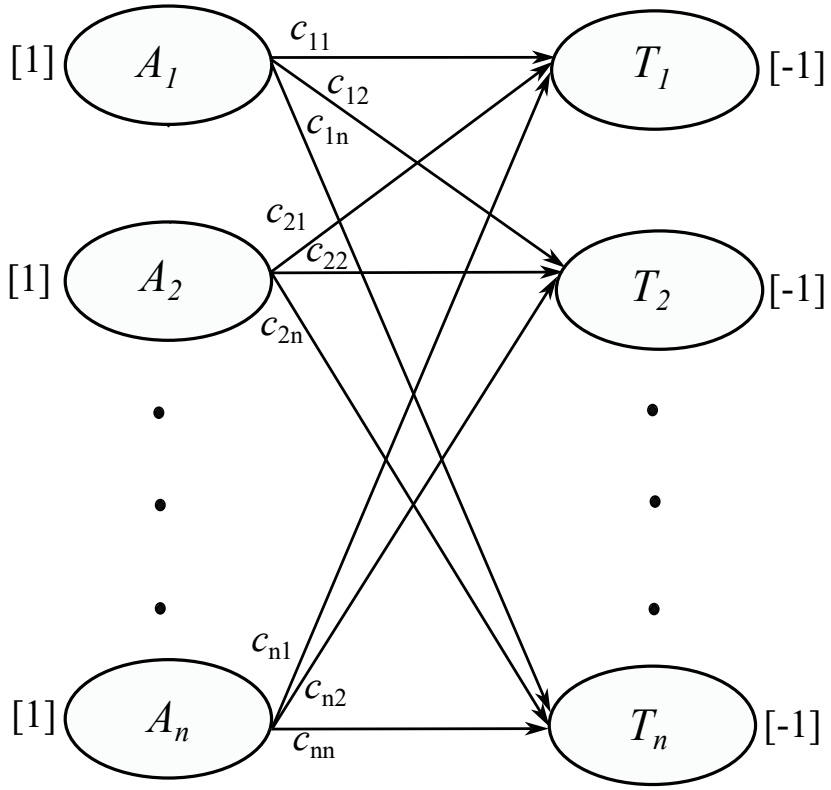
U ovoj knjizi će biti razmatran samo linearni problem raspoređivanja. Ovaj problem se može općenito predstaviti na sljedeći način:
Neka je na raspolaganju m izvršilaca odnosno radnika, pri čemu se pod ovim pojmom podrazumijeva neko ili nešto što može da obavi ili proizvede neku aktivnost. Neka je, također, na raspolaganju n radnih mjesta odnosno radnih zadataka na kojima se mogu realizirati te aktivnosti. Pri tome, svaki od izvršilaca može biti raspoređen na samo jedno mjesto, a svakom mjestu može biti dodijeljen samo jedan izvršilac. Svaki konkretan raspored izvršilaca na radna mjesta proizvodi određeni efekat koji je poznat. Ako se izvršilac I_i, $i = 1, 2, ..., m$ rasporedi na mjesto M_j, $j = 1, 2, ..., n$, time se ostvaruje efekat (dobit ili trošak) c_{ij}, pri čemu su veličine c_{ij} poznate. Potrebno je pronaći takav raspored zadanih izvršilaca na zadana radna mjesta koji će dati optimalni efekat (maksimalnu dobit ili minimalne troškove), poštujući postavljena ograničenja.

6.6.1 Postavka problema raspoređivanja

Problem raspoređivanja je specijalan slučaj linearnog programiranja gdje je izvršiocima A_i, $i = 1...m$ potrebno dodijeliti zadatke T_j, $j = 1...n$. Da bi se mogao definisati problem raspoređivanja, potrebno je formulisati sljedeće pretpostavke [30]:

1. Svaki izvršilac može obavljati samo jedan zadatak,
2. Svaki zadatak može biti obavljen samo od strane jednog izvršioca,
3. Efekat izvršavanja zadatka T_j, $j = 1...n$ od strane izvršioca A_i, $i = 1...m$ je označen kao c_{ij}.
4. Zadatak je rasporediti izvršioce na zadatke tako da se postigne optimalan ukupni efekat.

Na slici 6.6 je dat grafički prikaz problema raspoređivanja.



Slika 6.6: Grafički prikaz problema raspoređivanja.

Teoretski, ovaj problem bi se mogao riješiti ispitivanjem svih mogućih raspoređenja i biranjem onog rasporeda koji daje najbolji efekat. Međutim, problem je što broj svih mogućih raspoređenja raste iznimno brzo sa povećanjem m i n. Ukoliko je $m = n$, ukupan broj raspodjela je $n!$, tako da je ovaj pristup neprimjenljiv za veće zadatke raspoređivanja. Za bilo kakav bolji pristup, prvo je potrebno formirati matematički model problema raspoređivanja.
Može se primijetiti da za svakog mogućeg izvršioca A_i, $i = 1, 2, ..., m$ i svaki mogući radni zadatak T_j, $j = 1, 2, ..., n$ postoji jedna i samo jedna od sljedeće dvije mogućnosti: ili će izvršiocu A_i biti dodijeljen zadatak T_j, ili izvršiocu A_i neće biti dodijeljen zadatak T_j. Stoga se uvode promjenljive x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ sa sljedećim značenjem:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je izvršiocu } A_i \text{ dodijeljen zadatak } T_j \\ 0, & \text{ako izvršiocu } A_i \text{ nije dodijeljen zadatak } T_j \end{cases}$$

Uvođenjem ovih promjenljivih, lahko je izraziti funkciju cilja. Ukoliko je i-tom izvršiocu dodijeljen j-ti zadatak, time se ostvaruje efekat c_{ij}, dok ukoliko to nije slučaj, time se ne ostvaruje nikakav efekat, odnosno ostvaruje se ukupan efekat $c_{ij}x_{ij}$. Stoga se ukupan efekat koji se ostvaruje od svih raspoređivanja može predstaviti relacijom 6.19.

$$\begin{aligned} Z = \quad & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ + \quad & c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots \\ + \quad & c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ovo je funkcija cilja koju treba optimizirati (minimizirati ili maksimizirati).
Što se tiče ograničenja, prvo će se posmatrati slučaj kada je $m = n$. U ovom slučaju je moguće svakog izvršioca rasporediti na neki zadatak, i na svaki zadatak moguće je rasporediti nekog izvršioca. Stoga se činjenica da će i-ti izvršilac biti raspoređen na tačno jedan zadatak može iskazati relacijom 6.20.

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = 1 \tag{6.20}$$

Kako sve promjenljive x_{ij} mogu biti isključivo 0 ili 1, zbir sa lijeve strane jednak je jedinici ako i samo ako je tačno jedna od promjenljivih sa lijeve strane jednaka jedinici. Ovakva ograničenja se mogu napisati za sve izvršioce A_i, $i = 1, 2, ..., m$.
Slično, ograničenje da će na j-ti zadatak biti raspoređen tačno jedan izvršilac, može se zapisati u obliku relacije 6.21.

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = 1 \tag{6.21}$$

Ovakva ograničenja se mogu zapisati za sve zadatke T_j, $j = 1, 2, ..., n$.

Zajedno sa ograničenjima da sve promjenljive mogu uzimati samo vrijednosti 0 ili 1, dobije se matematički model problema raspoređivanja predstavljen relacijama 6.22, 6.23 i 6.24, uz pretpostavku da se razmatra problem minimizacije (u slučaju maksimizacije samo se mijenja "min"u "max", dok ograničenja ostaju ista).

$$\begin{aligned} \arg\min Z = \quad & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ + \quad & c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots \\ + \quad & c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned} \tag{6.22}$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} &= 1 \\ &\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= 1 \\ &\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= 1 \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.24}$$

Uočavaju se tri skupine ograničenja:

- ograničenja na izvršioce (svaki izvršilac mora biti raspoređen na tačno jedan zadatak) - relacija 6.26,
- ograničenja na zadatke (na svaki zadatak mora biti raspoređen tačno jedan izvršilac) - relacija 6.27,
- ograničenja na logičku (binarnu) prirodu svih promjenljivih - relacija 6.28.

Koristeći oznake za sumaciju, ovaj matematički model se može zapisati na način prikazan relacijama 6.25, 6.26, 6.27 i 6.28.

$$\arg\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6.25}$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{6.26}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.27}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.28}$$

Do sada je razmatran slučaj kada je jednak broj izvršilaca i broj zadataka, tj. kada je $m = n$. Ovakvi problemi raspoređivanja se nazivaju balansirani ili zatvoreni problemi raspoređivanja [35].
Ukoliko broj izvršilaca i broj zadataka nisu jednaki, radi se o nebalansiranom odnosno otvorenom problemu raspoređivanja. Kod ovakvih problema, matematički model se mora izmijeniti kako bi bio uopće rješiv.
Ukoliko je $m > n$, odnosno ukoliko je broj izvršilaca veći od broja zadataka, to znači da na svaki zadatak može i dalje biti raspoređen jedan izvršilac, ali će postojati izvršioci koji neće biti raspoređeni nigdje. To znači da u ograničenjima za ma kojeg j-tog izvršioca suma promjenljivih x_{ij}, $j = 1, 2, ..., n$ ne mora biti isključivo 1, već može biti i 0. To dovodi do ograničenja prikazanog relacijom 6.29.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{6.29}$$

Matematički model otvorenog problema raspoređivanja kod koga je $m > n$, može se predstaviti skupom relacija 6.30.

$$\arg\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{6.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.31}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.32}$$

Ovaj problem se može svesti na zatvoreni problem raspoređivanja. Kako je $m > n$, $m-n$ izvršilaca će ostati neraspoređeni. Stoga se uvodi $m-n$ različitih fiktivnih zadataka, tako da će svaki od izvršilaca koji ne može biti raspoređen, biti "raspoređen"na različit fiktivni zadatak. To znači da se uvodi $m(m-n)$ fiktivnih promjenljivih x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = n+1, n+2, ..., m$. Efekat raspoređivanja na fiktivni zadatak jednak je nuli, odnosno $c_{ij} = 0$ za $i = 1, 2, ..., m$, $j = n+1, n+2, ..., m$. Time je problem sveden na zatvoreni problem raspoređivanja.
Na sličan način se mogu transformisati i otvoreni problemi raspoređivanja kod kojih je broj zadataka veći od broja izvršilaca, tj. kod kojeg je $n > m$.

U ovakvim slučajevima će postojati zadaci na koje neće biti niko raspoređen, te se pojavljuju ograničenja prikazana relacijom 6.33.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.33}$$

Ovaj problem se svodi na zatvoreni problem raspoređivanja uvođenjem $n-m$ različitih fiktivnih izvršilaca koji će biti "raspoređeni"na one zadatke na koje neće biti zapravo niko raspoređen. Efekat raspoređivanja fiktivnog izvršioca jednak je nuli, odnosno $c_{ij} = 0$ za $j = 1, 2, ..., n$, $i = m+1, m+2, ..., n$. Time je problem sveden na zatvoreni problem raspoređivanja. [38]
Stoga se problem raspoređivanja kao problem linearnog programiranja može predstaviti na način prikazan skupom relacija 6.34.

$$\arg\min Z(x) = c^T \cdot x$$

p.o.

$$Ax = b \tag{6.34}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n$$

gdje se vektor c popunjava na sljedeći način:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \ldots & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrica A popunjava na sljedeći način:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor b se popunjava na sljedeći način:

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrica A ima dimenzije $(m+n)$xmn, vektor b je dimenzija $(m+n)$x1, dok vektor c ima dimenzije 1xmn.

6.6.2 Cjelobrojnost rješenja problema raspoređivanja

Problem raspoređivanja sa cjelobrojnim koeficijentima c_{ij} uvijek ima cjelobrojna optimalna rješenja i upravo zbog toga se problemi raspoređivanja mogu posmatrati kao specijalan slučaj problema linearnog programiranja. To znači da sve vršne tačke imaju cjelobrojne koordinate i to je potrebno dokazati.
Za neki n-dimenzionalni poliedar u E^n kažemo da je cjelobrojni poliedar ukoliko mu svi vrhovi imaju cjelobrojne koordinate. Dopustive oblasti problema raspoređivanja sa cjelobrojnim koeficijentima efekata su zapravo cjelobrojni poliedri.
Neka je dat poliedar $\Omega = \{x \in E^n | Ax = b \wedge\ x \geq 0\}$ koji predstavlja dopustivu oblast nekog problema linearnog programiranja.

Pretpostavit će se da matrica A ima m redova i n kolona, pri čemu je $m \leq n$ i neka ima puni rang. Također, pretpostavit će se da su svi elementi matrice A i vektora b cijeli brojevi. Ukoliko je Ω cjelobrojni poliedar, tada su sva dopustiva rješenja odgovarajućeg problema linearnog programiranja cjelobrojna.
Totalna unimodularnost matrice A predstavlja dovoljan uslov da svi poliedri oblika $\Omega = \{x \in E^n | Ax = b \wedge x \geq 0\}$ kod kojeg su svi elementi matrice A i vektora b cijeli brojevi budu cjelobrojni poliedri. Neophodan uslov je da svi minori reda m budu jednaki 0, 1 ili -1. Ukoliko matrica A sadrži jediničnu submatricu unutar sebe (što je uvijek slučaj kod problema raspoređivanja), tada se lako može pokazati da ukoliko su svi minori reda m jednaki 0, 1 ili –1, tada su i svi ostali minori istog oblika, odnosno A je tada i totalno unimodularna. Slijedi da je u takvim slučajevima totalna unimodularnost potreban i dovoljan uslov za cjelobrojnost svih poliedara $\Omega = \{x \in E^n | Ax = b \wedge x \geq 0\}$.

Matrica A je totalno unimodularna ukoliko zadovoljava sljedeće uslove:

1. Svi elementi matrice A su isključivo 0, 1 ili -1,
2. Svaka kolona matrice ima najviše dva elementa različita od nule,
3. Redovi matrice se mogu podlijediti na dva skupa P i Q, tako da nenulti elementi istog znaka iz bilo koje kolone ne pripadaju istom skupu, a nenulti elementi različitog znaka iz bilo koje kolone pripadaju istom skupu.

Ovo je dovoljan uslov da se pokaže da problemi raspoređivanja imaju totalno unimodularnu matricu.[38]

Ukoliko se ispišu sva ograničenja:

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} & & & & & & & = & 1\\
 & x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} & & & & & & = & 1\\
 & & & & \ldots & & & = & 1\\
 & & & & & x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} & & = & 1\\
x_{11} & +x_{21} & & & \ldots & +x_{m1} & & = & 1\\
\quad x_{12} & \quad +x_{22} & & & \ldots & \quad +x_{m2} & & = & 1\\
 & & & & \ldots & & & = & 1\\
 & & x_{1n} & +x_{2n} & \ldots & & +x_{mn} & = & 1
\end{array}
$$

dobije se da matrica A ima sljedeći oblik:

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\\
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
$$

Za $m=n=3$ dobije se matrica:

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Struktura matrice A potvrđuje teorijske osobine problema raspoređivanja, te omogućava da se na temelju nje formulišu i riješe konkretni problemi optimizacije rasporeda.

Zadatak 46.

Dva izvršioca A_1 i A_2 potrebno je rasporediti na dva radna zadatka T_1 i T_2 pri čemu je profit koji se postiže raspoređivanjem svakog od radnika na svaki od raspoloživih zadataka dat u tabeli 6.4. Potrebno je odrediti optimalan raspored ovih izvršilaca na radna mjesta kojim će se postići maksimalni ukupni profit.

Tabela 6.4: Raspored radnika - zadatak 46.

	T1	T2
A1	5	4
A2	6	2

Rješenje zadatka 46:

Ovaj primjer je naveden kako bi se mogli prikazati koraci simpleks algoritma, odnosno simpleks tabele. Za probleme sa većim dimenzijama, te tabele su jako velike i nisu pogodne za prikazivanje.
Profit koji se postiže raspoređivanjem svakog od radnika na svaki od raspoloživih zadataka dat je u tabeli 6.4. Na osnovu ove tabele može se formirati problem linearnog programiranja i predstaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \arg\min Z &= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} \\ &= 5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{21} + 2x_{22} \end{aligned}$$

p.o.

$$\begin{array}{lllll} x_{11} + x_{12} & & & = & 1 \\ & & x_{21} + x_{22} & = & 1 \\ x_{11} & & + x_{21} & = & 1 \\ & x_{12} & +x_{22} & = & 1 \end{array}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,2, j = 1,2$$

Na osnovu toga mogu se popuniti matrica A, te vektori b i c i oni su dati kao:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Formira se početna simpleks tabela 6.5.

Tabela 6.5: Početna simpleks tabela - zadatak 46.

x_i	C_i	C_j	5	4	6	2	-M	-M	-M	-M	Prov.	θ
		b_i	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_3	-M	1	1	1	**0**	0	1	0	0	0	3	$+\infty$
x_4	-M	**1 - ϵ**	**0**	**0**	1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**3**	**1 - ϵ**
x_5	-M	1	1	0	**1**	0	0	0	1	0	3	1
x_6	-M	1	0	1	**0**	1	0	0	0	1	3	$+\infty$
Z(x)	-4M+Mϵ	S_j	0	0	**-M**	-M	0	-M	0	0		
		C_j-S_j	5	4	**6+M**	2+M	-M	0	-M	-M		

Kako uslov za zaustavljanje nije zadovoljen, formira se naredna simpleks tabela 6.6.

Tabela 6.6: Simpleks tabela prve iteracije - zadatak 46.

x_i	C_i	C_j	5	4	6	2	-M	-M	-M	-M	Prov.	θ
		b_i	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_3	-M	1	**1**	1	0	0	1	0	0	0	3	1
x_{21}	6	1 - ϵ	**0**	0	1	1	0	1	0	0	3	$+\infty$
x_5	-M	ϵ	1	**0**	**0**	**-1**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**0**	ϵ
x_6	-M	1	**0**	1	0	1	0	0	0	1	3	$+\infty$
Z(x)	6	C_j-S_j	**5**	4	0	-4	-M	-6-M	-M	-M		

Uslov zaustavljanje nije zadovoljen, formira se naredna simpleks tabela 6.7.

Tabela 6.7: Simpleks tabela druge iteracije - zadatak 46.

x_i	C_i	C_j	5	4	6	2	-M	-M	-M	-M	Prov.	θ
		b_i	$a_{\mathbf{11}}$	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_3	-M	**1 - ϵ**	**0**	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**3**	**1 - ϵ**
x_{21}	6	1 - ϵ	0	**0**	1	1	0	1	0	0	3	$+\infty$
x_{11}	5	ϵ	1	**0**	0	-1	0	-1	1	0	0	$+\infty$
x_6	-M	1	0	**1**	0	1	0	0	0	1	3	1
Z(x)	6	C_j-S_j	0	**4**	0	1	-M	-1-M	-5-M	-M		

Budući da u redu $C_j - S_j$ ima pozitivan element, potrebno je formirati i narednu simpleks tabelu 6.8.

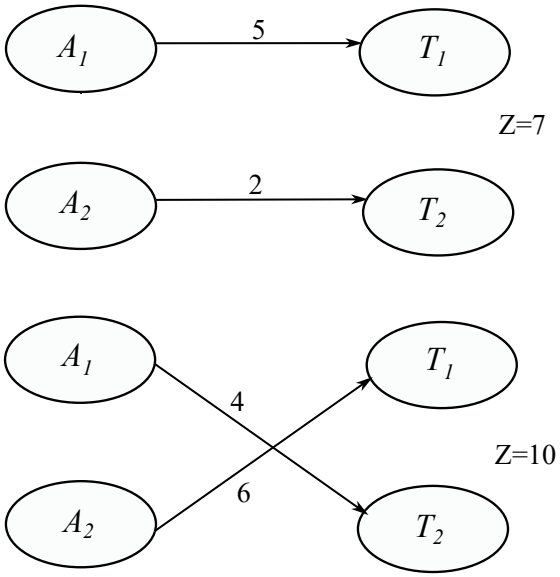
Tabela 6.8: Simpleks tabela treće iteracije - zadatak 46.

x_i	C_i	C_j	5	4	6	2	-M	-M	-M	-M	Prov.	θ
		b_i	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_3	a_4	a_5	a_6		
x_{12}	4	1 - ϵ	0	1	0	1	1	1	-1	0	3	
x_{21}	6	1 - ϵ	0	0	1	1	0	1	0	0	3	
x_{11}	5	ϵ	1	0	0	-1	0	-1	1	0	0	
x_6	-M	ϵ	0	0	0	0	-1	-1	1	1	0	
Z(x)	10	C_j-S_j	0	0	0	-3	-4-M	-5-M	-1-M	-M		

Ovo je ujedno i posljednja simpleks tabela iz koje se može očitati rješenje ($\epsilon \longrightarrow 0$):

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1, \quad x_{21} = 1, \quad x_{22} = 0, \quad Z(x) = 10$$

Postoje dva moguća rješenja ovog primjera i prikazana su na slici 6.7.



Slika 6.7: Rješenja za primjer 1.

Kako je zadatak napraviti optimalnu raspodjelu tako da se ostvari maksimalni profit, može se zaključiti da je drugo rješenje optimalno i ima vrijednost funkcije cilja $Z(x) = 10$, te da prvog izvršioca treba rasporediti na drugi zadatak, a drugog izvršioca na prvi zadatak.

Zadatak 47.

Neka je poznat potreban broj radnika za održavanje voznog reda, dat u tabeli (6.9). Polusmjene treba kombinovati tako da radnici rade u osmosatnim intervalima. Naći optimalan raspored radnika, kao i broj radnika koji starta u određeno vrijeme.

Tabela 6.9: Raspored radnika u smjeni - zadatak 47.

Vrijeme	**Potreban broj radnika**
01-05	15
05-09	30
09-13	26
13-17	32
17-21	30
21-05	19

Rješenje zadatka 47:

Problem određivanja optimalnog broja radnika po smjenama formulisan je kao problem linearnog programiranja. Uvedene su varijable odlučivanja x_i, $i = 1, \ldots, 6$, koje predstavljaju broj radnika angažovanih u pojedinim vremenskim intervalima:

x_1 – broj radnika za vrijeme 01–09
x_2 – broj radnika za vrijeme 05–13
x_3 – broj radnika za vrijeme 09–17
x_4 – broj radnika za vrijeme 13–21
x_5 – broj radnika za vrijeme 17–01
x_6 – broj radnika za vrijeme 21–05

Na osnovu datih zahtjeva formira se sljedeći sistem linearnih ograničenja:

$$x_1 + x_6 = 15$$
$$x_1 + x_2 = 30$$
$$x_2 + x_3 = 26$$
$$x_3 + x_4 = 32$$
$$x_4 + x_5 = 30$$
$$x_5 + x_6 = 19$$

Cilj je minimizirati ukupan broj radnika, što se može zapisati funkcijom cilja:

$$J = \min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

uz uslov nenegativnosti:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

Dakle, problem se prevodi u standardnu formu linearnog programiranja:

$$\min\{P(x)\} \quad \text{uz ograničenja } A_{eq} \cdot x = b_{eq},\ x \geq 0,$$

Problem je riješen primjenom metode linearnog programiranja korištenjem softverskog paketa MATLAB. Dobijeno je sljedeće optimalno rješenje:

$$\begin{bmatrix} x_1^* = 17.6850 \approx 17 \\ x_2^* = 12.3150 \approx 12 \\ x_3^* = 13.6850 \approx 13 \\ x_4^* = 18.3150 \approx 18 \\ x_5^* = 11.6850 \approx 11 \\ x_6^* = 7.3150 \approx 7 \end{bmatrix}$$

Dobijene vrijednosti predstavljaju optimalan broj radnika po smjenama, pri čemu je ukupni broj angažovanih radnika minimalan uz zadovoljenje svih postavljenih ograničenja, čime je dati zadatak u potpunosti riješen.

Može se zaključiti da problemi raspoređivanja, bilo da se radi o dodjeli radnika na zadatke ili optimizaciji smjena, uvijek posjeduju cjelobrojna optimalna rješenja zahvaljujući totalnoj unimodularnosti matrice ograničenja, čime se omogućava praktična primjena metoda linearnog programiranja u stvarnim organizacijskim situacijama.

Prikazani primjeri jasno pokazuju kako linearno programiranje i cjelobrojno linearno programiranje mogu efikasno rješavati različite praktične probleme od transporta, maksimalnog protoka i minimalnog puta na mreži, do problema raspoređivanja i Knapsack problema. Posebno je naglašena vrijednost totalne unimodularnosti matrica ograničenja u osiguravanju cjelobrojnih rješenja, što omogućava pouzdanu primjenu LP-metoda u realnim organizacijskim situacijama.

Iako su ove metode i dalje osnova za optimizaciju, u posljednjih nekoliko godina razvijene su i nove tehnike, koje uključuju metaheuristiku (genetski algoritmi, simulirano kaljenje, Particle Swarm Optimization) i hibridne pristupe, kombinovanjem LP i mašinskog učenja. Ovakvi moderni pristupi omogućavaju rješavanje složenijih problema u dinamičnim okruženjima [39, 40]. Primjena ovih savremenih metoda pruža veću fleksibilnost i često bolju prilagodljivost stvarnim uslovima, posebno kada se radi o velikim mrežama, nesigurnim podacima ili real-time optimizaciji.

Ove teme i praktična istraživanja bit će predmet detaljnijeg razmatranja u narednim izdanjima ovog udžbenika, čime se nastavlja razvoj modernih metoda optimizacije i njihova primjena u saobraćaju i komunikacijama.

Bibliografija

[1] J. Petrić, L. Šarenac, and Z. Kojić, *Operaciona istraživanja.* Naučna knjiga, 1984.

[2] R. R. Meyer, "Integer and mixed-integer programming models: general properties," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 16, no. 3, pp. 191–206, 1975.

[3] J. Liu and T. Liu, "A two-stage multi-objective optimization algorithm for solving large-scale optimization problems," *Algorithms*, vol. 18, no. 3, p. 164, 2025.

[4] W. Fan, L. J. Hong, G. Jiang, and J. Luo, "Review of large-scale simulation optimization," *Journal of the Operations Research Society of China*, vol. 13, no. 3, pp. 688–722, 2025.

[5] R. M. Curry and J. C. Smith, "Models and algorithms for maximum flow problems having semicontinuous path flow constraints," *IISE Transactions*, vol. 50, no. 6, pp. 484–498, 2018.

[6] G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann, "An improved typology of cutting and packing problems," *European journal of operational research*, vol. 183, no. 3, pp. 1109–1130, 2007.

[7] E. Triantaphyllou, *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study.* Boston, MA: Springer, 2000.

[8] F. S. Hillier and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research.* New York, NY: McGraw-Hill Education, 10th ed., 2014.

[9] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization.* Cambridge university press, 2004.

[10] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms.* John wiley & sons, 2006.

[11] K. Deb, K. Sindhya, and J. Hakanen, *Multi-objective optimization.* CRC Press, 2016.

[12] J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott, *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys.* Springer Science & Business Media, 2005.

[13] A. Antoniou and W.-S. Lu, *Practical optimization: algorithms and engineering applications.* Springer., 2017.

[14] I. Griva, S. G. Nash, and A. Sofer, *Linear and nonlinear optimization 2nd edition.* SIAM, 2008.

[15] R. Fletcher, *Practical methods of optimization.* John Wiley & Sons, 2013.

[16] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization.* Springer, 2006.

[17] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods.* New York, NY: Wiley, 1969.

[18] O. Guler, *Foundations of Optimization.* New York, NY: Springer, 2010.

[19] A. Ruszczynski, *Nonlinear Optimization.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006.

[20] R. Bellman, *Dynamic Programming.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[21] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction.* Mineola, NY: Dover Publications, 2004.

[22] J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming.* New York, NY: Springer, 2nd ed., 2011.

[23] R. T. Rockafellar, *Continuous Optimization: Theory, Methods, and Examples.* New York, NY: Springer, 1998.

[24] L. A. Wolsey and G. L. Nemhauser, *Integer and Combinatorial Optimization.* New York, NY: Wiley, 2nd ed., 1998.

[25] G. V. Milovanović, *Simbolička implementacija nelinearne optimizacije.* Univerzitet u Nišu, 2009.

[26] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis.* Boston, MA: Cengage Learning, 10th ed., 2016.

[27] D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction.* Princeton University Press, 2012.

[28] B. Wallace, "Constrained optimization: Kuhn-tucker conditions," *Royal Holloway, Egham*, 2004.

[29] R. C. Robinson, *Introduction to Mathematical Optimization.* Northwestern University, 2013.

[30] R. E. Burkard, M. Dell'Amico, and S. Martello, *Assignment problems*, vol. 125. Siam, 2009.

[31] J. Brimberg, N. Mladenović, and P. Hansen, "Variable neighborhood search: The power of change and adaptation," *European Journal of Operational Research*, vol. 300, no. 1, pp. 1–15, 2023.

[32] L. A. Wolsey, *Integer Programming.* New York: Wiley-Interscience, 1998.

[33] J. N. Hooker, *A Principled Approach to Mixed Integer/Linear Problem Formulation.* Springer, 2009.

[34] M. Young, *The Technical Writer's Handbook.* Mill Valley, CA: University Science, 1989.

[35] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions.* Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1998.

[36] I. S. Jacobs and C. P. Bean, "Fine particles, thin films and exchange anisotropy," in *Magnetism* (G. T. Rado and H. Suhl, eds.), vol. III, pp. 271–350, New York: Academic, 1963.

[37] J. Reeb, "A special case for linear programming problems," 2002.

[38] T. Mateljan and Z. Jurić, *Predavanja na predmetu: Osnove operacionih istraživanja.* Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2014/15.

[39] X. Y. Lim and S. F. Sufahani, "Benchmarking metaheuristic algorithms against optimization techniques for transportation problem in supply chain management," *RESTI – Rekayasa Sistem dan Teknologi Informasi*, vol. 9, no. 3, 2021.

[40] M. L. Y. Chau and K. Gkiotsalitis, "A systematic literature review on the use of metaheuristics for the optimisation of multimodal transportation," *Evolutionary Intelligence*, vol. 18, p. 36, 2025.