Rješenja zadataka s prijemnog ispita za upis studenata u prvu godinu prvog ciklusa studija na FSK održanog 12.07.2017. godine

Zad. 1. Uprostiti (što je moguće više) zadane izraze:

a) $\left[\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)\right]\div\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$

b) $\frac{\left(ab^{-3}-a^{-3}b\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(b^{-2}-a^{-2}\right)^{-1}}$

c) $\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Rješenje:

a) Izraz je definisan akko vrijedi:

$$x\neq 0\wedge\ y\neq 0\ \wedge\ x\neq\mp y$$

Dakle, skup na kome je izraz definisan je:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y)\neq 0\ \wedge\ x\neq\mp y\}$$

$$\left[\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)\right]\div\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{x^2-y^2}{y^2x^2}\right)\cdot\left(\frac{x-y+x+y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x^2-y^2}{yx}\right)$$
$$=\left(\frac{x^2-y^2}{y^2x^2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{yx}{x^2-y^2}\right)=\frac{2}{y(x+y)}$$

b) $\frac{\left(ab^{-3}-a^{-3}b\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(b^{-2}-a^{-2}\right)^{-1}}=\frac{\left(\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{-1}}=\frac{\left(\frac{a^4-b^4}{a^3b^3}\right)^{-1}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2a^2}\right)^{-1}}=\frac{\frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)\cdot(a^2-b^2)}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}{\frac{b^2a^2}{a^2-b^2}}=\frac{1}{ab}$

Izraz je definisan akko vrijedi:

$$a\neq 0\wedge\ b\neq 0\ \wedge\ a\neq\mp b$$

c) $\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\cdot\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$$=12-2\cdot\sqrt{36-20}=12-2\sqrt{16}=12-8=4$$

Zad. 2.

a) Riješiti (u skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva):

i. jednačinu $\log x + \log(x-3) = 2\log(6-x)$

ii. nejednačinu $\sqrt{2x+14} < x+3$

b) Odrediti vrijednost realnog parametra m za koje će jednačina $x^2 - 7x + 2m - 4 = 0$ imati oba rješenja pozitivna

Rješenje:

a)

i. $\log x + \log(x-3) = 2\log(6-x)$

$Dp.$ $x > 0$ $\quad$ $6 - x > 0$

$x - 3 > 0$ $\quad$ $x < 6$

$x > 3$

$x \in (3,6)$

$\log x + \log(x-3) = \log(6-x)^2$

$\log x\,(x-3) = \log(6-x)^2$

$x(x-3) = (6-x)^2$

$9x - 36 = 0$

$x = 4$

Vrijednost $x = 4$ zadovoljava uslov Dp i time predstavlja rješenje jednačine.

ii. $\sqrt{2x+14} < x+3$

Zadana nejednačina je ekvivalentna sistemu nejednačina (S_1):

$$(s_1) \quad \begin{cases} 2x + 14 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \end{cases}$$

Sistem (S_1) se može predstaviti u obliku:

$$(s_1) \quad \begin{cases} x \geq -7 \\ x > -3 \\ (x+5)\cdot(x-1) > 0 \end{cases}$$

Skup svih rješenja sistema (S_1) je: $\mathcal{R}(S_1) = (1, \infty)$

c) Uslovi zadatka se mogu kratko napisati u obliku: $\begin{cases} 1^\circ D > 0 \\ 2^\circ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ 3^\circ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 49 - 4(2m-4) > 0 \\ 7 > 0 \\ 2m - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < \frac{65}{8} \\ 7 > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow m \in (2, \tfrac{65}{8})$$

Zad. 3.

a) Riješiti trigonometrijsku jednačinu:

$$2\sin^3 x + 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Rješenje:

$$2\sin^2 x\,(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(2\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin x = -1 \quad \vee \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}\ ) \Leftrightarrow$$

$$(\sin x = -1 \quad \vee \quad \sin x = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ )$$

Rezultat: $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ x_4 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ x_3 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) Ako je $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, izračunati $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Rješenje:

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Zbog uslova: $\left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ slijedi da je: $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Tražena vrijednost $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ili: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$.

Rezultat: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Zad. 4. Na pravcu: $p_1: y = x - 1$ odrediti tačku koja je podjednako udaljena od oba pravca:

$$p_2: 3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{i} \quad p_3: 4x + 3y = 0.$$

Pri tome, nacrtati zadane pravce p_1, p_2 i p_3.

Rješenje:

Kako je, općenito, rastojanje d tačke $M_0(x_0, y_0)$ od prave p, čija je jednačina:

$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, zadan formulom:

$$d = d(M_0, p) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

to ćemo traženu tačku označiti u obliku: $P(a, a-1)$.

Udaljenosti tačke P od traženih pravaca su:

$$d_1 = d(P, p_2) = \frac{|3 \cdot a - 4(a-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-a+5|}{\sqrt{25}} = \frac{|-a+5|}{5},$$

$$d_2 = d(P, p_3) = \frac{|4a + 3 \cdot (a-1)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|7a-3|}{\sqrt{25}} = \frac{|7a-3|}{5},$$

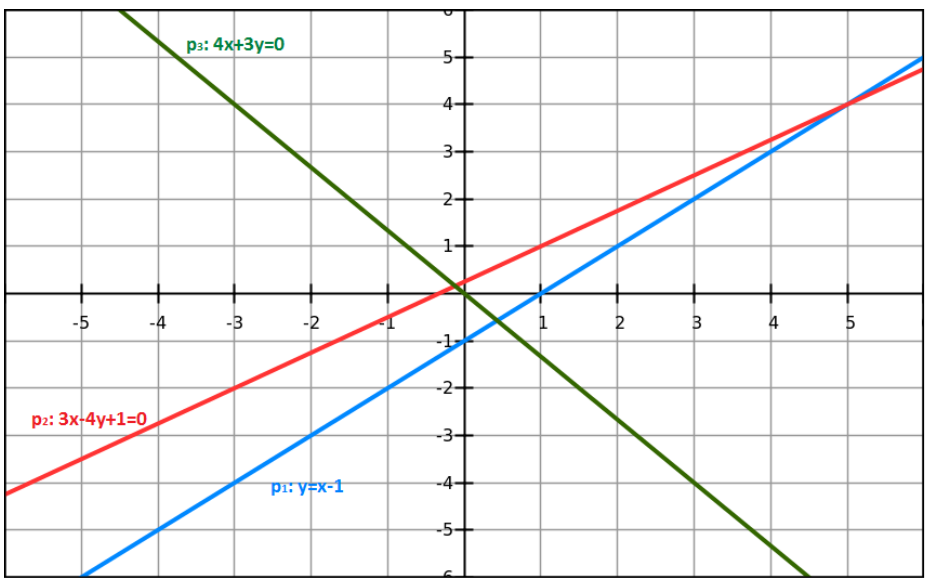
Iz uslova $d_1 = d_2$ dobijemo relaciju:

$$|-a + 5| = |7a - 3|, \text{ odnosno uslove}$$

$$-a + 5 = \pm(7a - 3).$$

Na osnovu uslova $-a + 5 = (7a - 3)$, imamo $-8a = -8$, tj. $a = 1$, pa je: $x_1 = 1$ $y_1 = 0$. Iz uslova: $-a + 5 = -(7a - 3)$, slijedi da je $6a = -2$, tj. $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{4}{3}$.

Dakle, dobiju se dvije tačke $P_1(1,0)$, $P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.


p₃: 4x+3y=0
p₂: 3x-4y+1=0
p₁: y=x-1